Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 4

УДК 517.43+530.145

МАТЕМАТИКА

В. Б. МАТВЕЕВ, М. М. СКРИГАНОВ

ВОЛНОВЫЕ ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С БЫСТРО ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 6 VII 1971)

1. В задаче рассеяния для операторов Шредингера

$$H = -\Delta + q(x), \quad \operatorname{Im} q = 0, \quad H_0 = -\Delta, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

существование полных волновых операторов (в.о.)

$$W_\pm(H, H_0) = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}e^{-itH_0} \tag{2}$$

установлено для потенциалов $q(x)$, убывающих при $|x| \to \infty$ как $|x|^{-1-\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ [1]. Если же $\varepsilon < 0$, пределы (2) могут не существовать [2]. Возможность существования в.о. в этой ситуации обнаружил В. С. Буслаев. В работе [3] им доказано существование в.о. в модели Фридрихса с ядром, имеющим особенность степенного типа вне диагонали. Такого типа особенности соответствуют, например, потенциалам вида $q(x) = |x|^{-\nu} \sin a|x|$, $0 < \nu < 1$ при $n = 1$.

В настоящей заметке доказано существование полных волновых операторов (2) для широкого класса «быстро» осциллирующих и, возможно, неограниченных при $|x| \to \infty$ потенциалов. Наш подход к задаче состоит в построении ограниченного оператора T такого, что оператор $Q = HT - TH_0$ локально является ядерным. Это позволяет доказать существование обобщенных в.о.

$$W_\pm^T(H, H_0) = s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}Te^{-itH_0}. \tag{3}$$

Кроме того, оператор $I - T$ оказывается локально вполне непрерывным. Отсюда следует существование полных в.о. (2) и их совпадение с операторами $W_\pm{}^T(H, H_0)$.

Отметим, что такой подход к задаче рассеяния для уравнения Шредингера был предложен авторами в работе [4], применительно к медленно убывающим и неосциллирующим потенциалам. При этом конструкция оператора T в настоящей заметке существенно отличается от использованной в [4].

2. Обозначим $r = |x|$, Δ_r — редиальная часть оператора Лапласа, $\alpha = r^{-1}x$, Δ_α — оператор Лапласа на единичной сфере S^{n-1}, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное скалярное произведение в R^n. Относительно потенциала $q(x) = q(r, \alpha)$ сделаем следующие предположения.

А) потенциал $q(x)$ является вещественной непрерывной функцией, и существуют конечные пределы

$$\sigma(x) = \lim_{N\to\infty} \int_r^N \xi^{n-1} q(\xi, \alpha)\, d\xi, \tag{4}$$

$$\Phi(x) = \lim_{N\to\infty} \int_r^N \xi^{-n+1} \sigma(\xi, \alpha)\, d\xi; \tag{5}$$

B) функция $\Phi(x)$ дважды дифференцируема при $r \geqslant r_0 > 0$ и при $r \to \infty$ выполняются оценки

$$\nabla\Phi(x) = O(1), \quad \Delta_\alpha\Phi(x) = O(r^2). \tag{6}$$

Отметим, что функция $\Phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_r\Phi(x) = q(x). \tag{7}$$

Введем в $L_2(R^n)$ оператор T:

$$(Tf)(x) = T(x)\cdot f(x), \quad T(x) = e^{\Phi_\eta(x)}, \quad \Phi_\eta(x) = \Phi(x)\eta(x); \tag{8}$$

здесь $\eta(x)$ — гладкая функция, равна 0 при $r \leqslant r_0$ и 1 при $r \geqslant r_1 > r_0$. Очевидно, что операторы T и T^{-1} ограничены.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* A) *и* B).

Тогда дифференциальный оператор H самосопряжен на области

$$\mathscr{D}(H) = T\mathscr{D}(H_0), \quad \mathscr{D}(H_0) = W_2^2(R^n). \tag{9}$$

Доказательство является модификацией известного рассуждения Т. Като ([5]). Достаточно убедиться, что при некотором $\tau > 0$ операторы $H \pm i\tau$ отображают $\mathscr{D}(H)$ на все $L_2(R^n)$. Воспользуемся тождеством

$$(H \pm i\tau)T = T[I + T^{-1}Q(H_0 \pm i\tau)^{-1}](H_0 \pm i\tau), \quad Q = HT - TH_0. \tag{10}$$

В силу самосопряженности H_0 на $\mathscr{D}(H_0)$ операторы $H_0 \pm i\tau$, $\tau > 0$, отображают $\mathscr{D}(H_0)$ на все $L_2(R^n)$. Остается проверить, что второй сомножитель в правой части (10) обратим при некотором $\tau > 0$. Для этого достаточно показать, что

$$\|T^{-1}Q(H_0 \pm i\tau)^{-1}\| < 1. \tag{11}$$

Прямым подсчетом проверяется, что оператор Q действует на функцию $f \in W_2^2$ как дифференциальный оператор первого порядка

$$(Qf)(x) = \langle Q_1(x), \nabla f(x)\rangle + Q_2(x)f(x), \tag{12}$$

$$Q_1(x) = -2T(x)\nabla\Phi_\eta(x), \tag{13}$$

$$Q_2(x) = T(x)[-\Delta\Phi_\eta(x) + q(x) - (\nabla\Phi_\eta(x))^2]. \tag{14}$$

При $r > r_1$ $Q_2(x)$ принимает вид

$$Q_2(x) = T(x)[-r^{-2}\Delta_\alpha\Phi(x) - (\nabla\Phi(x))^2]. \tag{15}$$

В силу условий A) и B) функции $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ ограничены при всех x. Отсюда следует справедливость оценки (11) при достаточно большом $\tau > 0$. Теорема доказана.

3. Предположим, что вместо B) выполняется более жесткое условие:

B_1) функция $\Phi(x)$ дважды дифференцируема при $r \geqslant r_0 > 0$ и при $r \to \infty$ справедливы оценки

$$\nabla\Phi(x) = O(r^{-n-\varepsilon}), \quad \Delta_\alpha\Phi(x) = O(r^{-n+2-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \tag{16}$$

Теорема 2. *При условиях* A) *и* B_1) *существуют полные волновые операторы* (2).

Доказательство. Обозначим через $E_0(\cdot)$ спектральную меру оператора H_0. Из условия B_1) и формул (12)—(15) следует, что

$$Q_{1,2}(x) = O(r^{-n-\varepsilon}), \quad r \to \infty, \tag{17}$$

поэтому для любого ограниченного интервала Δ оператор $QE_0(\Delta)$ ядерный ([6]). Далее

$$1 - T(x) = O(r^{-\delta}), \quad \delta > 0, \quad r \to \infty. \tag{18}$$

Отсюда стандартными рассуждениями доказывается, что для любого ограниченного интервала Δ оператор $(I - T)E_0(\Delta)$ вполне непрерывен в

$L_2(R^n)$. Теперь из теоремы 5.2 работы ([7]) следует, что существуют пределы (3) и операторы $W_\pm^T(H, H_0)$ осуществляют унитарную эквивалентность оператора H_0 и абсолютно непрерывной части H.

Известно, что для любого вполне непрерывного оператора A

$$s - \lim_{t\to\pm\infty} Ae^{-itH_0} = 0. \tag{19}$$

Поэтому одновременно с $W_\pm^T(H, H_0)$ существуют пределы (2) и имеют место равенства

$$W_\pm(H, H_0) = W_\pm^T(H, H_0). \tag{20}$$

Теорема 2 доказана.

Существование пределов (3) может быть установлено при условии, что при $r\to\infty$

$$\nabla\Phi(x) = O(r^{-1-\varepsilon}), \quad \Delta_\alpha\Phi(x) = O(r^{1-\varepsilon}), \quad \varepsilon > 0. \tag{21}$$

В этом случае на плотном в $L_2(R^n)$ множестве функции $f(x)$ легко проверяется оценка

$$\|Qe^{-itH_0}f\| = O(t^{-1-\delta}), \quad \delta > 0, \quad t\to\pm\infty, \tag{22}$$

которой достаточно для существования пределов (3). Оператор $I - T$ локально вполне непрерывен. Следовательно, существуют пределы (2) и справедливы равенства (20).

Примеры. Условия, при которых справедлива теорема 2, выполняются, например, для потенциалов

$$q_1(x) = \varphi(\alpha)e^{r^k}\sin e^{r^m}, \quad m > k > 0,$$

$$q_2(x) = \varphi(\alpha)\sin r^m, \quad m > n+1,$$

где $\varphi(\alpha)$ — гладкая функция на сфере S^{n-1}.

Авторы выражают благодарность В. С. Буслаеву за ценное обсуждение результатов работы.

Примечание при корректуре. После того как эта заметка была отправлена в печать, авторам удалось получить новые результаты о спектре оператора (1) с быстро осциллирующим потенциалом. В работе М. И. Скриганова (сдана в печать в «Труды Математического института АН СССР, «Наука») для таких операторов получены признаки конечности отрицательной части спектра и отсутствия положительных собственных значений. Кроме того, для некоторого класса быстро осциллирующих потенциалов описана полная система собственных функций непрерывного спектра оператора (1). В работе В. Б. Матвеева (сдана в печать в сборник «Проблемы математической физики», изд. ЛГУ) при $n = 1$ предложено обобщение конструкции оператора T, позволяющее провести доказательство существования и полноты волновых операторов (2) для более широкого класса осциллирующих потенциалов.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова
Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
29 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Kato, Proc. Int. Conf. on Funct. Anal. and Rel. Topics, Tokyo, 1969. [2] В. С. Буслаев, В. Б. Матвеев, Теоретическая и математическая физика, **2**, № 3, 367 (1970). [3] В. С. Буслаев, Вестн. Ленингр. унив., сер. матем., № 13 (3), 153 (1970). [4] В. Б. Матвеев, М. М. Скриганов, Теоретическая и матем. физика, **10**, № 2 (1972). [5] T. Kato, Trans. Am. Math. Soc., **70**, № 2, 195 (1952). [6] W. Stinespring, J. Reine and Angew. Math., **200**, № 3—4, 200 (1958). [7] А. Л. Белопольский, М. Ш. Бирман, Изв. АН СССР, **32**, № 5, 1162 (1968).