

В. В. БЕЛЕЦКИЙ, А. П. ТОРЖЕВСКИЙ

УСТОЙЧИВОСТЬ БЫСТРЫХ ВРАЩЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО СПУТНИКА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 19 VII 1971)

Движение осесимметричного спутника (твердого тела) относительно центра масс на круговой орбите в ньютоновском гравитационном поле можно описать системой канонических уравнений ⁽³⁾

$$\begin{aligned} dG/dt &= -\partial H/\partial \psi, & dG_n/dt &= -\partial H/\partial \lambda, & dG_a/dt &= -\partial H/\partial \varphi = 0, \\ d\psi/dt &= \partial H/\partial G, & d\lambda/dt &= \partial H/\partial G_n, & d\varphi/dt &= \partial H/\partial G_a \end{aligned} \quad (1)$$

с функцией Гамильтона

$$H = T(G, G_a) - U(G, G_n, G_a, \psi, \lambda - \nu). \quad (2)$$

Здесь $\nu = \omega_0 t$ — истинная аномалия орбиты, ω_0 — орбитальная частота (постоянная на круговой орбите), G — модуль вектора кинетического момента $\mathbf{G}$ спутника, G_n, G_a — проекции этого вектора соответственно на бинормаль $\mathbf{n}$ орбиты и на полярную ось a эллипсоида инерции спутника; ψ — угол поворота спутника около $\mathbf{G}$, λ и φ — углы поворота вектора $\mathbf{G}$ соответственно вокруг $\mathbf{n}$ и направления оси a . Кинетическая энергия T вращения спутника и силовая функция U влияния на него гравитационного поля представляются в виде

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{G^2}{B} + G_a^2 \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \right], \quad U = -\frac{3}{2} \omega_0^2 (A - B) \gamma_1^2, \quad (3)$$

где A, B — соответственно полярный (по оси a) и экваториальный моменты инерции спутника ($A \neq B$), γ_1 — направляющий косинус радиуса-вектора орбиты с осью a ,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \sqrt{1 - q_n^2} [q_n \cos \psi \cos (\lambda - \nu) - \sin \psi \sin (\lambda - \nu)] + \\ &+ q_a \sqrt{1 - q_n^2} \cos (\lambda - \nu), \\ q_n &= G_n / G, \quad q_a = G_a / G. \end{aligned}$$

Так как угол φ является циклической координатой, то порядок системы (1) можно понизить на 2 путем перехода к новой системе, состоящей из первых четырех уравнений в (1). Гамильтонианом новой системы будет функция (2), где импульс G_a , соответствующий углу φ , входит как параметр. Зависимость силовой функции (3) от времени легко исключить, переходя от λ к новому углу

$$\tilde{\lambda} = \lambda - \nu.$$

В итоге получим консервативную систему с двумя степенями свободы с гамильтонианом

$$H^* = H - \omega_0 G_n = G^2 / (2B) - \omega_0 G_n - U(G, G_n, \psi, \tilde{\lambda}). \quad (4)$$

Нас будет интересовать случай быстрых вращений спутника около центра масс, когда частота вращений много больше орбитальной частоты. Иными словами, кинетическая энергия вращений T намного превосходит

силовую функцию U . Указанный факт позволяет ввести в систему малый параметр. Более точно, обозначим через G_0 какое-нибудь значение кинетического момента (например, начальное значение). Введем новую независимую переменную τ , связанную со временем t формулой

$$\tau = \Omega t. \quad (5)$$

Величина $\Omega = G_0/B$ представляет частоту свободных (без учета влияния силовой функции U) вращений спутника. Ввиду малости U по сравнению с T , замена (5) фактически означает переход к временному масштабу порядка периода возмущенного движения.

Для удобства обезразмерим функцию (4) и импульсы G, G_n, G_a . С этой целью рассмотрим вместо G, G_n, G_a новые импульсы

$$\bar{G} = G/G_0, \quad \bar{G}_n = G_n/G_0, \quad \bar{G}_a = G_a/G_0.$$

Тогда система с гамильтонианом (4) преобразуется в эквивалентную ей систему с гамильтонианом

$$H^{**} = H^* B/G_0^2 = (1/2 \bar{G}^2) (\omega_0/\Omega) G_n + \alpha (\omega_0/\Omega)^2 \gamma_1^2, \quad (6)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{1 - \bar{q}_a^2} [\bar{q}_n \cos \psi \cos \tilde{\lambda} + \sin \psi \sin \tilde{\lambda}] + \bar{q}_n \sqrt{1 - \bar{q}_n^2} \cos \tilde{\lambda},$$

$$\alpha = 3/2 [A/B - 1] \quad (\alpha \neq 0 \text{ по условию}), \quad \bar{q}_n = \bar{G}_n/\bar{G}, \quad \bar{q}_a = \bar{G}_a/\bar{G}.$$

Взяв в качестве малого параметра ε отношение частот $\varepsilon = \omega_0/\Omega$, перепишем функцию (6) как

$$H^{**} = H_0(\bar{G}) + \varepsilon H_1(\bar{G}, \bar{G}_n) + \varepsilon H_2(\bar{G}, \bar{G}_n, \psi, \lambda), \quad (7)$$

где

$$H_0 = 1/2 \bar{G}^2, \quad H_1 = -\bar{G}_n + \varepsilon \alpha \bar{\gamma}_1^2, \quad H_2 = \varepsilon \alpha (\gamma_1^2 - \bar{\gamma}_1^2),$$

$\bar{\gamma}_1^2$ — среднее значение функции γ_1^2 по углам $\psi, \tilde{\lambda}$:

$$\bar{\gamma}_1^2 = (1/(2\pi))^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma_1^2 d\psi d\tilde{\lambda} = (1/4 \bar{q}_n^2) (1 - 3 \bar{q}_a^2).$$

Первые два слагаемых в (7) задают гамильтониан эволюционной системы, получающийся при усреднении силовой функции U . Считая эту систему невозмущенной, запишем ее в виде

$$d\bar{G}/d\tau = 0, \quad d\psi/d\tau = \partial(H_0 + \varepsilon H_1)/\partial\bar{G} = \omega_1(\bar{G}, \bar{G}_n),$$

$$d\bar{G}_n/d\tau = 0, \quad d\tilde{\lambda}/d\tau = \partial(H_0 + \varepsilon H_1)/\partial\bar{G}_n = \omega_2(\bar{G}, \bar{G}_n), \quad (8)$$

$$\omega_1 = \bar{G} + \varepsilon \alpha \partial \bar{\gamma}_1^2 / \partial \bar{G}, \quad \omega_2 = \varepsilon \alpha \partial \bar{\gamma}_1^2 / \partial \bar{G}_n.$$

Решение системы (8) определяет условно-периодическое движение фазовой точки с частотами ω_1, ω_2 по поверхности двумерного инвариантного тора

$$V_0(\bar{G}, \bar{G}_n) = \{\bar{G} = \text{const}, \bar{G}_n = \text{const}, \psi \pmod{2\pi}, \tilde{\lambda} \pmod{2\pi}\}, \quad (9)$$

лежащего в фазовом пространстве $\{\bar{G}, \bar{G}_n, \psi, \tilde{\lambda}\}$. При этом спутник будет совершать следующее движение в новом времени τ (⁴, ³). Постоянный по величине вектор кинетического момента $\mathbf{G}$ медленно процессирует с частотой ω_2 ($\sim \varepsilon$) около бинормали орбиты $\mathbf{n}$ на постоянном угловом расстоянии δ от нее. Угол δ находится из соотношения

$$\cos \delta = \bar{G}_n/\bar{G}. \quad (10)$$

В свою очередь, ось a эллипсоида инерции спутника прецессирует с частотой ω_1 (~ 1) около вектора $\mathbf{G}$ на постоянном угловом расстоянии θ , определяемом из условия

$$\cos \theta = \bar{G}_a/\bar{G}. \quad (11)$$

Нетрудно показать, что первое слагаемое обращается в нуль при $\tilde{G}_a^2/\tilde{G}^2 = 1/3$, а квадратная скобка — при $\tilde{G}_n = 0$. Это доказывает справедливость последнего условия теоремы при всех допустимых значениях параметров $\tilde{G}_a, \alpha, \varepsilon$.

Выбрав число δ из условия $|H_2| < \varepsilon C = \delta$, приходим к следующим выводам. При достаточно малых значениях параметра $\varepsilon = (\omega_0/\Omega)$, $0 < \varepsilon < \delta$, в фазовом пространстве $(\tilde{G}, \tilde{G}_n, \psi, \lambda)$ существуют двумерные инвариантные торы V_ω системы с гамильтонианом (7), которые близки к невозмущенным торам (9) эволюционной системы (8) и несут на себе условно периодические движения с частотами ω_i , $i = 1, 2$; торы V_ω образуют замкнутое нигде не плотное множество положительной меры $\text{mes } F_1$. Между торами V_ω имеются щели (резонансные зоны) малой суммарной меры $\text{mes } F_2(\sim \sqrt{\varepsilon})$, заполненные остатками разрушившихся невозмущенных торов с соизмеримыми частотами ω_i . Структура движений в этих щелях имеет сложный «запутанный» характер ⁽¹⁾.

Торы V_ω имеются на каждом «уровне энергии» $H^{**} = \text{const}$ (в том числе и на нулевом $H = 0$). Но двумерные торы делят каждый трехмерный инвариантный «уровень энергии». Поэтому фазовая траектория системы, начавшись в щели между двумя торами V_ω , уже не может ее покинуть. Отсюда вытекает теорема об устойчивости найденной ранее квазирегулярной прецессии спутника по ее геометрическим и скоростным характеристикам.

Теорема 2. Для любого $\kappa > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что при всех ε , $0 < \varepsilon < \delta$, выполняются неравенства

$$|\tilde{G}(\tau) - \tilde{G}(\tau_0)| < \kappa, \quad |\tilde{G}_n(\tau) - \tilde{G}_n(\tau_0)| < \kappa. \quad (14)$$

Другими словами, величина вектора кинетического момента G спутника, углы прецессии δ и нутации θ , определяемые формулами (10), (11), будут всегда оставаться вблизи своих начальных значений, которые являются геометрическими характеристиками прецессии. С учетом (14) и периодичности функции (7) по $\psi, \tilde{\lambda}$ аналогичный вывод имеет место для угловых скоростей $d\psi/d\tau, d\lambda/d\tau$: они будут мало отличаться от своих невозмущенных значений ω_1 и ω_2 .

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. И. Арнольд, УМН, 18, в. 6 (1963). ² R. В. Ваггар, Am. J. Math., 88 (1966).
³ А. П. Торжевский, Космич. исследов., 6, в. 1 (1968). ⁴ В. В. Белецкий, Движение искусственного спутника относительно центра масс, «Наука», 1965. ⁵ В. И. Арнольд, УМН, 18, в. 5 (1963).