Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 517.946

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. В. ОЛИМПИЕВ

АСИМПТОТИКА ПОЛЯ В ОБЛАСТИ ТЕНИ ДЛЯ СВЕТЯЩЕЙСЯ НИТИ, РАСПОЛОЖЕННОЙ НА ВЫПУКЛОМ ЦИЛИНДРЕ

(Представлено академиком В. А. Фоком 27 IV 1971)

1. В настоящей работе исследуется функция Грина внешней задачи Неймана для уравнения Гельмгольца во внешности гладкой замкнутой выпуклой кривой Г. Строятся высокочастотные асимптотические ряды в зоне тени. Сначала находится семейство решений уравнения Гельмгольца в эвольвентных координатах на разветвленной поверхности для кривой Г (см. п. 2); это семейство решений зависит от произвольной функции дуги кривой Г, что позволяет строить решения, удовлетворяющие различным краевым условиям на кривой Г, в частности, асимптотические ряды для волн соскальзывания и асимптотические ряды для функции Грина внешней задачи Неймана в зоне тени на разветвленной поверхности. При этом существенно, что источник находится на кривой Г. В этом случае область тени начинается сразу от источника и для отыскания функции Грина в зоне тени на разветвленной поверхности можно поставить обычную краевую задачу в эвольвентных (лучевых в зоне тени) координатах. Поле на физической плоскости во внешности кривой Г находится так же, как в случае, когда кривая Г есть круг. А именно, функция Грина на разветвленной поверхности суммируется по всем точкам наблюдения, расположенным на разветвленной поверхности «одна под другой», причем учитывается обход контура Г по часовой и против часовой стрелки.

2. Известно, что поле в зоне тени должно описываться некоторыми непериодическими при обходе контура Г функциями — волнами соскальзывания, рассмотренными в [1,2]. Фронты волновых возмущений совпадают с эвольвентами кривой Г, лучи в зоне тени являются полукасательными к кривой Г. Поэтому естественно для анализа явлений в зоне тени рассматривать уравнение Гельмгольца в лучевых координатах ξ, η, где $|\eta|$ — длина дуги кривой Г от начала отсчета до точки касания луча $\eta = \mathrm{const}$; знак η зависит от направления обхода контура Г; $(\xi - \eta)$ — длина касательной, проведенной из данной точки вне Г к кривой Г, так что $\xi = \mathrm{const}$ есть уравнение эвольвенты кривой Г. Уравнением кривой Г будет $\xi = \eta$. Когда η меняется от $-\infty$ до $+\infty$, а $\xi \geqslant \eta$, то получается разветвленная вокруг кривой Г поверхность [1,2].

3. Наш метод исследования состоит в следующем. Семейство решений уравнения Гельмгольца, о котором шла речь выше, представляется в виде некоторого контурного интеграла, при помощи специального интегрального преобразования обобщающего известную информацию о волнах соскальзывания [1,2]. Подынтегральные функции являются решениями линейных неоднородных уравнений в частных производных первого порядка. Для получения высокочастотных асимптотических рядов подынтегральные функции разлагаются в ряды по степеням малого параметра, а для коэффициентов этих рядов получаются явные рекуррентные алгебраические соотношения, содержащие произвольную функцию дуги кривой Г. Для волн соскальзывания, удовлетворяющих однородному краевому условию на границе Г, эта функция также определяется при помощи явных алгеб-

раических рекуррентных соотношений. Так, конструируемые асимптотические ряды справедливы для точек наблюдения, находящихся на любом расстоянии от границы Г. В работах ([1], [2]) написана простая формула для поля в тени и полутени, в которой поле выражается через множитель ослабления для поверхности постоянной кривизны; однако эту простую формулу получить из параболического уравнения не удалось и вместо нее получились более сложные выражения, несколько более точные вблизи поверхности тела, но обладающие неприятными особенностями вдали от нее. В настоящей работе эта простая формула получается в качестве первого приближения и уточняется с помощью процедуры, позволяющей практически построить столько дальнейших приближений, сколько требуется. Для точек, находящихся вблизи кривой Г, построенные ряды приводят к тем же результатам, что и разложения работы ([3]). Нахождение асимптотических разложений функции Грина в зоне тени на разветвленной поверхности отличается от построения разложений для волн соскальзывания лишь тем, что надо удовлетворить неоднородному краевому условию. Поэтому упомянутое семейство решений интегрируется по вспомогательному параметру. Из требования удовлетворения краевому условию вытекает интегральное уравнение первого рода с малым параметром. Как и при построении волн соскальзывания, подынтегральные функции в интегральном уравнении разлагаются в ряды по степеням малого параметра. Неоднородное краевое условие удовлетворяется при помощи первого члена разложения. Из требования обращения в нуль на кривой Г последующих приближений получаются явные рекуррентные алгебраические соотношения для определения функции длины дуги кривой Г, входящей в исходное семейство решений. Предложенная конструкция позволяет построить столько членов асимптотического ряда для функции Грина в зоне тени, сколько требуется.

В работе ([3]) асимптотические разложения для волн соскальзывания исследуются при импедансных краевых условиях с помощью координат пограничного слоя. Коэффициенты разложения функции Грина по волнам соскальзывания определяются приближенно. В настоящей работе построены равномерные асимптотические ряды для волн соскальзывания и предложен алгоритм для сколь угодно точного определения коэффициентов разложения функции Грина по волнам соскальзывания в случае, когда источник находится на жесткой границе.

4. Перейдем к точной постановке задачи. Кривая Г задается натуральным уравнением $\rho=\rho(\eta)$, где радиус кривизны $\rho(\eta)$ предполагается аналитической функцией дуги η, ограниченной при $0\leqslant\eta\leqslant L$, где L — длина контура Г. Функция $\rho(\eta)$ считается периодически продолженной на область $-\infty<\eta<+\infty$. Уравнение Гельмгольца в эвольвентных координатах (ξ,η) имеет вид ([1], [2])

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\rho(\eta)}{\xi-\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\rho(\eta)}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+k^2u=0. \tag{1}$$

Функция ξ удовлетворяет уравнению эйконала. Поэтому естественна замена

$$u=e^{ik\xi}V. \tag{2}$$

Для функции V получается уравнение на разветвленной поверхности ([1], [2])

$$(\xi-\eta)^3\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}+\rho(\eta)(\xi-\eta)^2\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{\rho(\eta)}{\xi-\eta}\frac{\partial V}{\partial\eta}+$$
$$+\left(2ik(\xi-\eta)^3+(\xi-\eta)^2\right)\frac{\partial V}{\partial\xi}+ik(\xi-\eta)^2V=0. \tag{3}$$

Для волн соскальзывания на кривой Г ставятся краевые условия

$$V|_\Gamma=0\quad\text{или}\quad\partial V/\partial n|_\Gamma=0. \tag{4}$$

Так как функции u и V должны описывать дифракционное поле в зоне тени, то при больших $\xi - \eta$ естественно потребовать выполнения условия излучения

$$u \sim \frac{e^{i\nu\xi}}{\sqrt{\xi-\eta}} A(\eta), \quad V \sim \frac{A(\eta)}{\sqrt{\xi-\eta}}. \tag{5}$$

Для функции Грина $U(\xi, \eta)$ в области тени вместо краевого условия (4) ставится условие

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 2i\delta(\eta), \text{ т. е. } \lim_{\xi\to\eta} \frac{\rho(\eta)}{\xi-\eta} \frac{\partial U}{\partial \eta} = 2i\delta(\eta), \tag{6}$$

где $\delta(\eta)$ есть δ-функция Дирака. Краевая задача (1), (5), (6) определяет функцию Грина внешней задачи Неймана на разветвленной поверхности с источником колебаний в точке $\xi = \eta = 0$ *.

5. Основными результатами работы являются следующие.

I. Уравнение (3) формально удовлетворяется функциями вида

$$V = \int_{\gamma} \exp\left(\frac{i}{\varepsilon^3} x\alpha^2\right) F(\eta, \alpha, \varepsilon)\, d\alpha, \tag{7}$$

где $\varepsilon = (2/k)^{1/3}$; $x = (\xi - \eta) / \rho^{2/3}(\eta)$; контур γ состоит из лучей $\arg \alpha = = 4\pi/3$ и $\arg \alpha = 0$. Для функции F справедливо представление

$$F = \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon^3} \Phi_{-3}(\alpha, \eta) + \frac{1}{\varepsilon}\left(\Phi_{-1}(\alpha, \eta) + \int_0^{\eta} f\, d\bar{\eta}\right) + \Phi_0(\alpha, \eta)\right\}, \tag{8}$$

где функция $f(\eta)$ произвольна, а функции Φ_{-3}, Φ_{-1}, Φ_0 удовлетворяют уравнениям

$$\left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{4\rho^{2/3}}} + \frac{1}{3}\frac{\rho'}{\rho^{1/3}}\alpha\right)\frac{\partial \Phi_j}{\partial \alpha} + i\rho^{2/3}\frac{\partial \Phi_j}{\partial \eta} =$$
$$= \begin{cases} -\alpha^2, & j = -3; \\ -i\rho^{2/3} f, & j = -1; \\ -\dfrac{\alpha}{4\rho^{2/3}\sqrt{1 + \alpha^2/(4\rho^{2/3})}} - \dfrac{i}{3}\dfrac{\rho'}{\rho^{1/3}}, & j = 0; \end{cases} \tag{9}$$

и обращаются в нуль при $\alpha = 0$.

II. Для волн соскальзывания $u_j(\xi, \eta)$, функции Грина на разветвленной поверхности $U(\xi, \eta)$ и функции Грина на обычной плоскости $P(x, y)$ выведены следующие формулы:

$$u_j^{(1,2)}(\xi, \eta) = \frac{e^{ik\xi}}{\rho^{1/6}(\eta)} \exp\left[i\frac{\mu_j^{(1,2)}}{\varepsilon}\int_0^{\eta}\frac{d\bar{\eta}}{\rho^{2/3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \int_0^{\eta} f_n^{(1,2)}(\bar{\eta}, \mu_j^{(1,2)})\, d\bar{\eta}\right] \times \tag{10}$$
$$\times \int_{\infty \exp(4\pi i/3)}^{\infty} \exp\left[\mu_j^{(1,2)}\omega + \frac{i}{\varepsilon}\frac{\xi-\eta}{\rho^{2/3}(\eta)}\omega^2 - \frac{\omega^3}{3}\right]\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n P_n(\omega, \eta, \mu_j^{(1,2)})\right\} d\omega;$$

---

* Переход к функции Грина $P(x, y)$ на физической плоскости производится следующим образом. Пусть (ξ, η) и (ξ_+, η_+) — семейство эвольвентных координат, связанных с обходом контура Γ по часовой стрелке, а (ξ_-, η_-) — семейство эвольвентных координат, связанных с обходом контура Γ против часовой стрелки. Для функции $P(x, y)$ справедлива формула

$$P(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} U(\xi_+ + mL, \eta_+ + mL) + \sum_{m=0}^{\infty} U(\xi_- + mL, \eta_- + mL),$$

где точка (x, y) находится в области тени; (ξ_+, η_+) и (ξ_-, η_-) — координаты точки (x, y) в двух семействах эвольвентных координат; L — длина контура Γ.

$$U(\xi, \eta) = -\frac{\varepsilon}{\rho^{1/6}(0)\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\mu_j^{(2)} w_1 \ (\mu_j^{(2)})} u_j^{(2)}(\xi, \eta); \tag{11}$$

$$P(x, y) = -\frac{\varepsilon}{\rho^{1/6}(0)\sqrt{\pi}} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\mu_j^{(2)} w_1 (\mu_j^{(2)})} \cdot \frac{u_j^{(2)}(\xi_+, \eta_+) + u_j^{(2)}(\xi_-, \eta_-)}{1 - e^{i\Phi_j(\varepsilon)}}; \tag{12}$$

где $\varepsilon = (2/k)^{1/3}$; $w_1(x)$ — функция Эйри — Фока, характеризующая уходящую волну; $\mu_j^{1,2}$ — корни функции Эйри — Фока или ее производной в зависимости от условия Дирихле или Неймана; $P_n(\omega, \eta, \mu)$ — полиномы от ω, определяемые с помощью рекуррентных соотношений вида

$$\frac{\partial P_n}{\partial \omega} = A_n\left(\frac{\partial P_{n-1}}{\partial \eta}, \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \omega}, \ldots, \frac{\partial P_1}{\partial \omega}, P_{n-1}, \ldots, P_1, f_{n-1}, \ldots, f_1\right), \tag{13}$$

получающихся при решении уравнений (9) при малых по модулю $\alpha = \varepsilon\omega$ с помощью степенных рядов по ε; A_n задаются простыми, но громоздкими выражениями, являющимися алгебраическими суммами полиномов $P_0 = 1$, $P_1, \ldots, P_{n-1}, \frac{\partial P_1}{\partial \omega}, \ldots, \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \omega}, \frac{\partial P_{n-1}}{\partial \eta}$ с коэффициентами, заданными явно; $f_n^{(1,2)}(\eta, \mu)$ — функции, зависящие от радиуса кривизны кривой Г и его производных по η, определяемые из выражений

$$\int_{\infty \exp(4\pi i/3)}^{\infty} P_n(\omega, \eta) \exp\left(\mu_j^{(1)}\omega - \frac{\omega^3}{3}\right) d\omega = 0$$

или

$$\int_{\infty \exp(4\pi i/3)}^{\infty} \omega\left\{\sqrt{1 + \frac{\varepsilon^2\omega^2}{4\rho^{2/3}}} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n P_n - 1\right\} \exp\left(\mu_j^{(2)}\omega - \frac{\omega^3}{3}\right) d\omega = 0; \tag{14}$$

условия (14) приводят к явным алгебраическим рекуррентным соотношениям для функций $f^{1,2}$ (η, μ);

$$\Phi_j(\varepsilon) = kL + \frac{\mu_j^{(2)}}{\varepsilon} \int_0^L \frac{d\bar{\eta}}{\rho^{2/3}} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \int_0^L f_n^{(2)}\, d\bar{\eta}. \tag{15}$$

В качестве N в формулах (11), (12) можно взять любое достаточно большое число. Дело в том, что формула (10) для волн соскальзывания перестает быть верной, когда $j \to \infty$. Но асимптотика поля в зоне глубокой тени при больших частотах определяется конечным числом членов формул (11) и (12), так как при $k \to \infty$ каждый последующий член сумм по j экспоненциально мал по модулю по сравнению с предыдущим. Все ряды в формулах (10) и (15) следует рассматривать как асимптотические.

Акустический институт
Москва

Поступило
9 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Фок, Л. А. Вайнштейн, Радиотехника и электроника, 8, № 3, ч. I. II, 363 (1963). [2] В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, М., 1970, стр. 179. [3] И. А. Молотков, В сборн. Проблемы математич. физики, в. 4, Л., 1970, стр. 83.