Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 1

УДК 519.217

МАТЕМАТИКА

Ю. К. БЕЛЯЕВ, В. И. ПИТЕРБАРГ

АСИМПТОТИКА СРЕДНЕГО ЧИСЛА A-ТОЧЕК ВЫБРОСОВ ГАУССОВСКОГО ПОЛЯ ЗА ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 6 VIII 1971)

Формула для среднего числа пересечений уровня реализацией дифференцируемого случайного процесса широко используется для приложений в статистической радиотехнике [1, 2]. В интересной по замыслу работе [3] была сделана попытка получить асимптотическую формулу для аналога среднего числа пересечений возрастающего уровня реализацией гауссовского стационарного процесса без обязательного требования дифференцируемости. Однако эта работа содержала существенную ошибку. В настоящей работе исследуются определяемые ниже A-точки выбросов вещественных однородных гауссовских полей $\zeta_t = \zeta(\mathbf{t})$, $\mathbf{t} \in R^n$, за неограниченно возрастающий уровень $u \uparrow \infty$.

Для формулировки условий и результатов введем следующие обозначения. $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n)'$, $l_1, \ldots, l_k$ — определяющие разбиение, $l_i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, \sum\limits_{i=1}^{k} l_i = n$, $\mathbf{t}^i = (t_{l_1+\ldots+l_{i-1}+1}, \ldots, t_{l_1+\ldots+l_i})'$, $|\mathbf{t}|^2 = \mathbf{t}\cdot\mathbf{t}'$, для $\bar{\alpha}$ $\alpha^i = (\alpha_i, \ldots, \alpha_i)' \in R^{l_i}$, $0 < \alpha_i \leqslant 2$, $i = 1, \ldots, k$. Для векторов $\mathbf{t}, \mathbf{s} \in R^n$ введем $\mathbf{t} * \mathbf{s} = (t_1 s_1, \ldots, t_n s_n)$, $|\mathbf{t}|_\alpha = \sum\limits_{i=1}^{k} |\mathbf{t}^i|^{\alpha_i}$, $\mathbf{u}_{\bar{\alpha}}$ — вектор из R^n,

$$\mathbf{u}^i_{\bar{\alpha}} = (u^{-2/\alpha_i}, \ldots, u^{-2/\alpha_i})' \in R^{l_i}, \quad K_n(\mathbf{t}) = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in R^n, 0 \leqslant u_i \leqslant t_i, i = 1, \ldots, n\},$$

$$K_n(\mathbf{t}) + \mathbf{s} = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in R^n,\ s_i \leqslant u_i \leqslant s_i + t_i,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

$\mathcal{R}_n(\mathbf{t})$ — множество узлов решетки, образованной вершинами; $\mathbf{k} * \mathbf{t} + K_n(\mathbf{t})$, $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)'$, $k_i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $K_{n,\mathbf{k}}(\mathbf{t}) = \{\mathbf{s} : k_i t_i \leqslant s_i \leqslant (k_i + 1) t_i$, $i = 1, \ldots, n\}$; $\mathcal{K}_n(\mathbf{t})$ — множество вершин $K_n(\mathbf{t})$.

Предполагаем, что гауссовское поле ζ_t, $E\zeta_t = 0$, $r(\mathbf{t}) = E\zeta_s\zeta_{s+t}$, $|r(\mathbf{t})| < 1$, $|\mathbf{t}| > 0$, удовлетворяет следующим условиям: существует невырожденное линейное преобразование C в R^n; определяющие разбиение числа $l_1, \ldots, l_k$, $\alpha_1 > 0, \ldots, \alpha_k > 0$ такие, что для $0 < L_i < \infty$, $i = 1, 2$,

$$r(C\mathbf{t}) = 1 - |\mathbf{t}|_\alpha + o(|\mathbf{t}|_\alpha), \quad L_1 \leqslant \frac{1 - r(C\mathbf{t})}{|\mathbf{t}|_\alpha} \leqslant L_2, \quad |\mathbf{t}| < \varepsilon. \tag{1}$$

Для простоты записи при доказательствах предполагается, что $C = I$ — единичная матрица. Для гауссовского поля χ_t [4, 5]

$$E\chi_t = |\mathbf{t}|_\alpha, \ \operatorname{cov}\{\chi(\mathbf{t}_1), \chi(\mathbf{t}_2)\} = |\mathbf{t}_1|_\alpha + |\mathbf{t}_2|_\alpha - |\mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2|_\alpha. \tag{2}$$

Пусть ξ_i — гауссовские случайные величины, $E\xi_i = 0$, $E\xi_i^2 = 1$, $E\xi_1\xi_2 = r$, $i = 1, 2$; тогда для $x > 0$, $h > 0$,

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \quad \Psi(x) = x^{-1}\varphi(x), \quad \overline{\Phi(x)} = \int\limits_x^\infty \varphi(u)\,du, \quad R(x) = \int\limits_x^\infty \overline{\Phi(u)}\,du$$

выполняются неравенства [3]

$$\Psi(x)(1 - x^{-2}) \leqslant \overline{\Phi(x)} \leqslant \Psi(x), \quad R(x) \leqslant e^{-x}, \quad R(x) \leqslant x^{-1}\Psi(x), \tag{3}$$

$$P\{\xi_1 > x, \xi_2 > x\} \leqslant (1+r)\,\Psi(x)\,\overline{\Phi\left(x\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\right)}, \tag{4}$$

$$P\{\xi_1 < x, \xi_2 > x+h\} \leqslant r^{-1}\sqrt{1-r^2}\,x\Psi(x)\,R\left(\frac{hr}{\sqrt{1-r^2}} - x\sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\right). \tag{5}$$

Лемма 1. *Пусть* (1) *выполнено, тогда*

$$\lim_{u\uparrow\infty} P\{\omega(K_n(\mathbf{u}_{\bar\alpha} * \mathbf{T})) > u\}(\Psi(u))^{-1} = H_\alpha(\mathbf{T}), \tag{6}$$

где $\omega(A) = \sup\limits_{\mathbf{t}\in A}\zeta_t$, $\mathbf{T} = (T, \ldots, T)' \in R^n$, $T > 0$,

$$H_\alpha(\mathbf{T}) = 1 + \int_0^\infty e^s P\left\{\max_{\mathbf{t}\in K_n(\mathbf{T})} \chi(\mathbf{t}) > s\right\} ds < \infty. \tag{7}$$

Схема доказательства. Для фиксированного $b < u$ имеем

$$P\{\omega(K_n(\mathbf{u}_{\bar\alpha} * \mathbf{T})) > u\} = P\{\zeta_0 > u\} +$$
$$+ P\{\zeta_0 \leqslant b, \omega(K_n(\mathbf{u}_{\bar\alpha} * \mathbf{T})) > u\} + P\{b < \zeta_0 \leqslant u, \omega(K_n(\mathbf{u}_{\bar\alpha} * \mathbf{T})) > u\}. \tag{8}$$

Из (3) находим асимптотику первого слагаемого (8). Пусть $\alpha_0 = \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $2^{-\alpha_0/2} < d < 1$,

$$B_u(\mathbf{t}) = \{\zeta_0 \leqslant b, \zeta_\mathbf{t} > u - 1/u\},$$

$$B^b_{u,m}(\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \{\zeta_{\mathbf{t}_0} \leqslant b, \zeta_{\mathbf{t}_1} > u - d^{m+1}/u, \zeta_{\mathbf{t}_2} \leqslant u - d^m/u\}.$$

В этих обозначениях имеем

$$\{\zeta_0 \leqslant b, \omega(K_n(\mathbf{u}_{\bar\alpha} * \mathbf{T})) > u\} \subseteq$$
$$\subseteq \bigcup_{\mathbf{t}\in K_n(\mathbf{u}_{\bar\alpha}*\mathbf{T})} B_\mathbf{u}(\mathbf{t}) \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{\substack{\mathbf{t}\in \mathcal{R}_n(2^{-m}\mathbf{u}_{\bar\alpha}*\mathbf{T}) \\ \mathbf{s}\in[\mathbf{t}+K_n(2^{-m}\mathbf{u}_{\bar\alpha}*\mathbf{T})] \cap \mathcal{R}_n(2^{-m-1}\mathbf{u}_{\bar\alpha}*\mathbf{T})}} B^b_{\mathbf{u},m}(\mathbf{o}, \mathbf{t}, \mathbf{s}). \tag{9}$$

Оценку $P\{B_u(\mathbf{t})\}$ и $P\{B^b_{\mathbf{u},m}(0, \mathbf{t}, \mathbf{s})\}$ получаем, используя (5) и (1). Ряд из вероятностей событий в (9) сходится равномерно по u, а каждое слагаемое есть $o(\Psi(u))$, т. е. второе слагаемое (8) оказывается $o(\Psi(u))$. Для $\chi_\mathbf{u}(\mathbf{t}) = u(\zeta(\mathbf{u}_{\bar\alpha} * \mathbf{t}) - u) - s$ имеем

$$P\{b < \zeta_0 \leqslant u, \omega(K_n(\mathbf{u}_{\bar\alpha} * \mathbf{T})) > u\} =$$
$$= \Psi(u) \int_0^{u(b-u)} e^{s - s^2/(2u^2)} P\left\{\max_{\mathbf{t}\in K_n(\mathbf{t})} \chi_u(\mathbf{t}) > s \mid \zeta_0 = u - \frac{s}{u}\right\} du. \tag{10}$$

Утверждение леммы следует из того, что при $u \uparrow \infty$ для $|\mathbf{h}| < \varepsilon$ и любого фиксированного $\mathbf{t}$, $L_3 > 0$

$$E\{\chi_u(\mathbf{t}) - \chi(\mathbf{t})|^2 | \zeta_0 = u + \frac{s}{u}\} \to 0,$$

$$E\left\{|\chi_u(\mathbf{t}+\mathbf{h}) - \chi_u(\mathbf{t})|^2 | \zeta_0 = u + \frac{s}{u}\right\} \leqslant L_3 |\mathbf{h}|_\alpha.$$

Лемма 2. *Существует предел*

$$H_\alpha = \lim_{T\uparrow\infty} \frac{H(\mathbf{T})}{T^n}. \tag{11}$$

Лемма 3. *Если выполнено условие* (1), A — *измеримое по Жордану множество положительной меры* $\nu(A) > 0$, $\operatorname{diam} A \leqslant \varepsilon$, *то найдутся такие* $L_4 > 0$ *и* $a > 0$, *что*

$$\lim_{u\uparrow\infty} P\{\omega(A) > u\}\left\{\prod_{i=1}^k u^{2l_i/\alpha_i}\Psi(u)\,\nu(A)\right\}^{-1} \geqslant$$
$$\geqslant a^{-n}\left(1 - \sum_{\substack{\mathbf{k},k_i=0 \\ i=1,\ldots,n}}^{\infty} \overline{\Phi}(\sqrt{L_4|\mathbf{k}|_\alpha a^{\alpha_0}})\right) \tag{12}$$

Пусть $\underline{N}_A(u, a)$, $\overline{N}_A(u, a)$ — числа прямоугольных параллелепипедов решетки $\mathscr{R}(\mathbf{u}_{\overline{\alpha}} * a)$ соответственно входящих в A или имеющих с A общие точки,

$$\lim_{u\uparrow\infty} \underline{N}_A(u, a) \prod_{i=1}^{k} (u^{-2l_i/\alpha_i})\, a^n = \lim_{u\uparrow\infty} \overline{N}_A(u, a) \prod_{i=1}^{k} (u^{-2l_i/\alpha_i})\, a^n = \nu(A). \qquad (13)$$

Теорема 1. *Если однородное гауссовское поле ζ_t удовлетворяет* (1), *то для любого измеримого по Жордану множества A, $\nu(A) > 0$,*

$$\lim_{u\uparrow\infty} \frac{P\{\omega(A) > u\}}{\prod_{i=1}^{k} (u^{2l_i/\alpha_i})\,\Psi(u)} = H_\alpha\,|\det C|^{-1}\,\nu(A) > 0. \qquad (14)$$

Пусть $K_{\mathbf{k}} = K_{n,\,\mathbf{k}}(u_{\overline{\alpha}} * \mathbf{T})$. Из (13) при $a = T$ имеем

$$P\{\omega(A) > u\} \leqslant P\Big\{\bigcup_{\mathbf{k},\,K_{\mathbf{k}}\cap A\neq\emptyset} \omega(K_{\mathbf{k}}) > u\Big\} \leqslant \overline{N}_A(u, T)\, P\{\omega(K_0) > u\}. \qquad (15)$$

Положительность нижней оценки следует из (12). Используем неравенство

$$P\{\omega(A) > u\} \geqslant \underline{N}_A(u, T)\, P\{\omega(K_0) > u\} -$$
$$- \overline{N}_A(u, T) \sum_{\mathbf{k}\neq 0} P\{\omega(K_0) > u,\, \omega(K_{\mathbf{k}}) > u\}. \qquad (16)$$

Сначала рассматриваем пары K_0 и $K_{\mathbf{k}}$, не имеющие общих граней, где имеем

$$P\{\omega(K_0) > u,\, \omega(K_{\mathbf{k}}) > u\} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=0}^{\infty} 2^{2mn-n} \max_{\mathbf{t}_0,\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2} P\{B^u_{u,m}(\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)\}, \qquad (17)$$

где $\mathbf{t}_0 \in \mathscr{R}_n(2^{-m}\mathbf{u}_{\overline{\alpha}} * \mathbf{T}) \cap K_0$, $\mathbf{t}_1 \in \mathscr{R}_n(2^{-m}\mathbf{u}_{\overline{\alpha}} * \mathbf{T}) \cap K_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{t}_2 \in \mathbf{t}_1 + \mathscr{K}_n(2^{-m-1}\mathbf{u}_{\overline{\alpha}} * \mathbf{T})$. Можно подобрать $N(k, T)$, таким образом, что оценивая $P\{B^u_{u,m}(\mathbf{t}_0, \mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2)\}$ при $m \leqslant N(k, T)$ из (4) для $\xi_i = \zeta(\mathbf{t}_i)$, $i = 0, 1$, а для $m > N(k, T)$ из (5) для $\xi_i = \zeta(\mathbf{t}_i)$, $i = 1, 2$, получаем для некоторых $0 < L_i < \infty$, $i = 5, 6$, что

$$P\{\omega(K_0) > u,\, \omega(K_{\mathbf{k}}) > u\} \leqslant \Psi(u) L_5 \exp\{-L_6 |\mathbf{k}|_\alpha T^{\alpha_0/2}\}. \qquad (18)$$

Разбивая пары со смежными гранями на параллелепипеды с вершинами в узлах $\mathscr{R}_n(\mathbf{u}_{\overline{\alpha}} * \mathbf{T})$, $\mathbf{T}_M = (T/M, \ldots, T/M)$, с достаточно большим целым M и оценивая отдельно вероятности одновременного выхода ζ_t за u для вновь полученных пар параллелепипедов со смежными гранями и без них, используя (17) и (18) получаем, что вычитаемое в (16) при предельном переходе $u \uparrow \infty$, а потом $T \uparrow \infty$ несущественно. Таким образом, справедливо выражение (14).

Обобщение на поля ε-точек, использованных в ([?], [6]), можно делать многими способами. Множество A $(A \subset R^n)$ назовем ловушкой для ζ_t, если в нем выделена особая точка $\mathbf{t}_A \in A$, причем для любого $\mathbf{s}$ такого, что $\mathbf{t}_{A+s} \notin A$, $t_A \notin A + \mathbf{s}$, следует, что $|\mathbf{t}_A - \mathbf{t}_{A+s}| \geqslant \rho_A > 0$. Ограничимся простейшими ловушками A_a с особыми точками $\mathbf{t}_{(a)} = (1/2a, \ldots, 1/2a, a)$, $a > 0$,

$$A_a = \{\mathbf{t}\colon 0 \leqslant t_i \leqslant a,\ i = 1, \ldots, n-1,\ 0 < t_n < a\} \cup$$
$$\cup \{\mathbf{t}\colon\ 0 \leqslant t_i \leqslant a,\ i = 1, \ldots, n-2,\ t_n = a,\ 0 < t_{n-1} < 1/2a\} \cup \ldots$$
$$\ldots \cup \{0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2a,\ t_n = a,\ t_{n-1} = \ldots = t_2 = 1/2a\} \quad \mathbf{t}_{(a)}.$$

Точку $\mathbf{t}$ назовем A_a-точкой выброса ζ_t за u, если

$$\zeta_t = u,\ \zeta_s < u,\ \mathbf{s} \in \{A_a + (\mathbf{t} - \mathbf{t}_{(a)})\} \setminus \{\mathbf{t}\},\ \rho_A \geqslant a.$$

Пусть $\mu_a(u)$ — интенсивность S_{A_a} — случайного точечного множества ([7]) A_a-точек.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (1), *то*

$$\lim_{u\uparrow\infty} \mu_a(u) / (\Psi(u) \prod_{i=1}^{k} u^{2l_i/\alpha_i}) = H_\alpha |\det C|^{-1}. \tag{19}$$

Поскольку A_a-точки не могут быть близки друг к другу, то достаточно исследовать асимптотику по $u\uparrow\infty$ $P\{S_{A_a} \cap K_n(\delta) \neq \phi\}$, $2\sqrt{n}\delta < a$. Для $A_{a,\delta} = \{\omega(K_n(a) \setminus [K_n(\delta) + \mathbf{t}_{a,\delta}]) < u,\quad \omega(K_n(\delta) + \mathbf{t}_{a,\delta}) \geqslant u\}$, $B_\delta = \bigcup \{\omega(K_n(\delta)) > u,\ \omega(K_n'(\delta)) > u\}$, где $\bigcup$ берется по всем $K_n'(\delta)$ на узлах решетки $\mathscr{R}_n(\delta)$, имеющим смежные грани с $K_n(\delta)$, а $\mathbf{t}_{a,\delta} = \left(\frac{a-\delta}{2}, \ldots, \frac{a-\delta}{2}, a-\delta\right)$, имеем

$$A_{a+\delta,\delta} \subseteq \{S_{A_a} \cap K_n(\delta) + \mathbf{t}_{a,\delta} \neq \phi\} \subseteq A_{a-\delta,\delta} \cup B_\delta. \tag{20}$$

Аналогично выводу теоремы 1 можно показать, что $P\{B_\delta\} = o(\prod_{i=1}^{k} u^{2l_i/\alpha_i}\Psi(u))$. Это вместе с (20) и (14) дает (19).

Заметим, что в выраженном случае $\alpha_i = 2$, $i = 1, \ldots, k$, (см. ([8]))

$$H_\alpha = (2\pi)^{-\frac{m+1}{2}} \sqrt{\det \left\| -\frac{\partial^2 r(0)}{\partial t_i \partial t_j} \right\|}$$

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. O. Rice, Bell System Techn. J., 24, 46 (1945). [2] В. И. Тихонов, Выбросы случайных процессов, «Наука», 1970. [3] J. Pickands III, Trans. Am. Math. Soc., 145, 51 (1969). [4] R. Gandolli, Ann. Inst. Henri Poincare, Sec. B, 3, 121 (1967). [5] T. Kawada, Nagoya Math. J., 35, 109 (1969). [6] Ю. К. Беляев, В. И. Питербарг, Теория вероятностей и ее применения, 14, 2, 217 (1970). [7] Ю. К. Беляев, Там же, 13, 3, 578 (1968). [8] В. П. Носко, Советско-Японский симпозиум по теории вероятностей в г. Хабаровске, Новосибирск, 1969, стр. 209.