Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 2

УДК 517.947 *МАТЕМАТИКА*

В. И. ПОЛОВИНКИН

ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 IV 1971)

Если Ω — неограниченная область в n-мерном пространстве E_n, то может оказаться, что решение первой краевой задачи для полигармонического уравнения

$$\Delta^m u = 0 \tag{1}$$

не единственно в классе $L^{(m)}(\Omega)$. Например, если Ω имеет в E_n ограниченное дополнение и $Q(\Omega)$ — линейное многообразие решений (1) с нулевыми граничными условиями класса $L_2^{(m)}(\Omega)$, то $Q(\Omega)$ изоморфно пространству линейных комбинаций одночленов степени, большей $m - n/2$ и меньшей m [6]. В настоящей работе дается описание структуры $Q(\Omega)$ и указывается условие на Ω, достаточное, чтобы решение первой краевой задачи для (1) в $L_2^{(m)}(\Omega)$ было единственно.

Обозначения: Ω — область в E_n, $E_n \neq \Omega$, такая, что все ее подмножества $F_R = \{x\colon x \in \Omega, |x| < R\}$ имеют границу, простую по Соболеву, размерности $n-1$ (определение простой границы см. [1]); S — граница Ω; A — множество целочисленных векторов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ с неотрицательными компонентами таких, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n < m$; $B = \{\alpha\colon \alpha \in A, \alpha_1 + \ldots + \alpha_n > m - n/2\}$; $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$; если M — одна из областей Ω или E_n, то $L_2^{(m)}(M)$ — линейное многообразие функций, имеющих M все обобщенные производные порядка m, которые являются в M квадратично суммируемыми; если $f, g \in L_2^{(m)}(M)$, то $(f, g)_{L_2^{(m)}(M)} = \int\limits_M \sum\limits_{j_1=1}^{n} \ldots \sum\limits_{j_m=1}^{n} \frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} \frac{\partial^m g}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_m}} dx$; $C_0^\infty(M)$ — множество бесконечно дифференцируемых функций с носителями, компактными в M; $\{l^\alpha\}_{\alpha \in A}$ — набор функционалов, определенных на $f \in L_2^{(m)}(\Omega)$, такой, что носители всех l^α ограничены, а $\det \| l^\alpha(x^\beta) \| \neq 0$ $(\alpha, \beta \in A)$ и $l^\alpha(f) = 0$ при $f \in C_0^\infty(\Omega)$ (заметим, что для областей с простой границей указанный $\{l^\alpha\}_{\alpha \in A}$ можно построить [1]); $W_2^{(m)}(M)$ — гильбертово пространство функций из $L_2^{(m)}(M)$ со скалярным произведением $(f, g)_{W_2^{(m)}(M)} = (f, g)_{L_2^{(m)}(M)} + \sum\limits_{\alpha \in A} l^\alpha(f) l^\alpha(g)$; $\mathring{W}_2^{(m)}(M)$ — замыкание в $W_2^{(m)}(M)$ функций из $C_0^\infty(M)$; $\mathring{W}_2^{(m)}(E_n\Omega)$ — множество следов на Ω функций из $\mathring{W}_2^{(m)}(E_n)$; $C = \{\alpha\colon \alpha \in B, x^\alpha \big|_\Omega \in \mathring{W}_2^{(m)}(E_n, \Omega)\}$; $\mathring{W}_2^{(m)}(\Omega)$ — замыкание в $W_2^{(m)}(\Omega)$ функций из $L_2^{(m)}(\Omega)$, равных нулю в некоторой окрестности S; D — множество $\alpha \in B$ таких, что для x^α найдется $f_\alpha \in \mathring{W}_2^{(m)}(E_n, \Omega)$ такая, что $[x^\alpha - f_\alpha] \in \mathring{W}_2^{(m)}(\Omega)$.

П е р в а я   к р а е в а я   з а д а ч а (п.к. задача). Пусть $\varphi \in L_2^{(m)}(\Omega)$. Найти $u \in L_2^{(m)}(\Omega)$, удовлетворяющую (1), такую, что

$$[u - \varphi] \in \mathring{W}_2^{(m)}(\Omega). \tag{2}$$

З а м е ч а н и е 1. Условие (2) соответствует заданию на S так называемых допустимых значений u и ее производных до порядка $m-1$ ([1]). В настоящей работе не исследуется, какие значения φ и ее производных действительно являются допустимыми. Эта проблема изучалась разными авторами в случае, когда носители функций, задающих краевые условия, ограничены (см. ([3])). В ([4]) выведены условия, формулируемые в терминах весовых классов, необходимые и достаточные, для того чтобы заданные значения функции и производных на плоскости S размерности $n-1$ были значениями $\varphi \in L_2^{(1)}(\Omega)$ и производных φ в случае, когда Ω — полупространство с границей S. В той же работе для такой Ω и уравнения Лапласа было доказано существование и единственность решения п.к. задачи.

З а м е ч а н и е 2. Решение п.к. задачи существует. Если функция φ из (2) принадлежит $\dot{W}_2^{(m)}(\Omega)$, то можно выбрать решение u также из $\dot{W}_2^{(m)}(\Omega)$. Эти утверждения доказываются так же, как доказывалось существование решения п.к. задачи в случае ограниченной области. Надо представить φ в виде $\varphi = u + v$, где $v \in \mathring{W}_2^{(m)}(\Omega)$, $u \perp \mathring{W}_2^{(m)}(\Omega)$ в $W_2^{(m)}(\Omega)$. Тогда u будет удовлетворять (1).

Л е м м а 1. *Если* $f \in \{\dot{W}_2^{(m)}(E_n\Omega) \cap Q(\Omega)\}$, *то* $\|f\|_{W_2^{(m)}(\Omega)} = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Теорема о плотности финитных функций в $L_2^{(m)}(E_n)$ ([2]) (([5]), стр. 288 при $m=1$) утверждает существование $\{\varkappa_h\} \subset C_0^\infty(E_n)$ такой, что всякая $u \in L_2^{(m)}(E_n)$ представима в виде

$$u = P + p, \quad \lim_{h\to 0}\|p - p\varkappa_h\|_{W_2^{(m)}(E_n)} = 0, \tag{3}$$

где P — линейная комбинация полиномов x^α, $\alpha \in B$. Можно показать что $P \notin \dot{W}_2^{(m)}(E_n)$. Отсюда следует, что f из условия леммы является пределом в $W_2^{(m)}(\Omega)$ функций $f\varkappa_h$. Так как $f\varkappa_h$ с производными до порядка $m-1$ равны нулю на S, то по лемме из ([1]), § 15, существует $\{\varphi_h^\tau\}_\tau \subset C_0^\infty(\Omega)$, сходящаяся к $f\varkappa_h$ в $W_2^{(m)}(\Omega)$. Из $\{\varphi_h^\tau\}_{\tau,h}$ извлечем последовательность $\{\psi_\gamma\}$, сходящуюся к f в $W_2^{(m)}(\Omega)$. Так как $\psi_\gamma \in C_0^\infty(\Omega)$, а f — полигармоническая в Ω, то $(\psi_\gamma, f)_{L_2^{(m)}(\Omega)} = (\psi_\gamma, f)_{W_2^{(m)}(\Omega)} = 0$ ([1]). Переходя к пределу от ψ_γ к f получим утверждение леммы.

Л е м м а 2. *Пусть* $\varphi \in W_2^{(m)}(\Omega)$ — *функция из* (2). *Если найдется* $f \in \dot{W}_2^{(m)}(E_n, \Omega)$ *такая, что* $[\varphi - f] \in \mathring{W}_2^{(m)}(\Omega)$, *то существует решение п. к. задачи* $U(\varphi) \in \dot{W}_2^{(m)}(E_n, \Omega)$, *единственное в* $\dot{W}_2^{(m)}(\Omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из леммы работы ([1]), § 15, вытекает, что всякое решение п.к. задачи класса $\dot{W}_2^m(\Omega)$, соответствующее φ из условий нашей леммы, принадлежит $\dot{W}_2^m(E_n, \Omega)$. Отсюда, из замечания 2 и леммы 1 следует лемма 2.

Т е о р е м а 1. *Всякая* $\bar{u} \in Q(\Omega)$ *единственным образом представима в виде*

$$\bar{u} = \sum_{\alpha \in D/C} a_\alpha (x^\alpha - U(x^\alpha)), \quad a_\alpha = \text{const}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1 основано на продолжении $\bar{u} \in Q(\Omega)$ нулем за пределы Ω. При таком продолжении получим функцию $u \in L_2^{(m)}(E_n)$, представимую в виде (3), где p — полигармоническая функция, принадлежащая классам $\dot{W}_2^{(m)}(E_n, \Omega)$, $\dot{W}_2^{(m)}(\Omega)$. Отсюда, из лемм 1, 2 может быть получено, что функции $f_\alpha = x^\alpha - U(x^\alpha)$, $\alpha \in D/C$, образуют базис в $Q(\Omega)$.

Теорема 2. *Если Ω такова, что E_n / Ω содержит конус $K(x_0, \mu) = \{x\colon x = x_0 + ts,\ x_0 \in E_n,\ s \in \mu,\ t > 0\}$, где μ — множество на поверхности единичной сферы в E_n, ненулевой поверхности меры, то решение п.к. задачи единственно в $L_2^{(m)}(\Omega)$.*

Доказательство. Пусть $\bar{u} \in Q(\Omega)$. Продолжая $\bar{u}$ до $u \in L_2^{(m)}(E_n)$ так же, как при доказательстве теоремы 1, получим для u представление (3). Для нахождения P по u в [2] приводится алгоритм. Анализируя его можно убедиться, что $P(x) = 0$ для наших u и Ω. Отсюда вытекает $\bar{u} \in \dot{W}_2^{(m)}(E_n, \Omega)$.

Применяя к $\bar{u}$ лемму 1, получаем $\|\bar{u}\|_{W_2^{(m)}(\Omega)} = 0$.

Автор выражает благодарность акад. С. Л. Соболеву за внимание к этой работе.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
9 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962. [2] С. Л. Соболев, Сибирск. матем. журн., 4, № 3, 673 (1963). [3] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, М., 1969. [4] Л. Д. Кудрявцев, ДАН, **157**, № 1, 45 (1964). [5] С. В. Успенский, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, **60**, 282 (1961). [6] В. И. Половинкин, Дифференциальные уравнения, **7**, № 1, 64 (1971).