Журнал экспериментальной и теоретической физики

Т. 61 *1971* *Вып. 5(11)*

К ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЕСТЕСТВЕННОЙ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ

Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков

Исследуется взаимосвязь между различными формулировками материальных уравнений и устанавливается вид граничных условий в феноменологической электродинамике непоглощающих оптически активных сред.

1. Установленная в микроскопической теории [1, 2] пропорциональность параметров, ответственных за электрическую и магнитную части оптической активности, в феноменологической теории была известна лишь для изотропной среды [3]. В случае анизотропных сред член, содержащий градиенты напряженности магнитного поля, был введен в материальное уравнение для магнитной индукции в [4, 5], однако в этих работах не предполагалось наличие связи между тензорами магнитной и электрической активности. Недавние исследования закона сохранения энергии электромагнитного поля [6–8] позволили найти такую связь в феноменологических материальных уравнениях для кристаллов. В этих работах было показано, что электрическая и магнитная части оптической активности описываются одним псевдотензором второго ранга α, причем материальные уравнения, аналогично случаю изотропной среды [3], имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{E} + \alpha \operatorname{rot} \mathbf{E}), \qquad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \tilde{\alpha} \operatorname{rot} \mathbf{H}) \tag{1}$$

(вещественные тензоры ε и μ симметричны: $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, $\tilde{\mu} = \mu$), а уравнения Максвелла формулируются для четырех векторов $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}, \tag{2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{3}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}, \tag{4}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0. \tag{5}$$

Из (2), (4) с использованием (1) следует закон сохранения электромагнитной энергии с вектором Пойнтинга $c[\mathbf{EH}]/4\pi$ и плотностью энергии $(\mathbf{D}\varepsilon^{-1}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mu^{-1}\mathbf{B})/8\pi$ [8].

Уравнения (1) отличаются от материальных уравнений для оптически активных сред в общепринятой форме (см., например, [9, 10]). При этом в [9] осталась невыясненной форма закона сохранения электромагнитной энергии, а энергетическое рассмотрение, проведенное в [4], вызывает возражение [7], касающееся вида вектора Пойнтинга. Следует также отметить, что решение граничной задачи с использованием материальных уравнений [4] и обычных условий непрерывности тангенциальных составляющих векторов электрической и магнитной напряженности на гра-

нице двух сред приводит к затруднениям с законом сохранения момента импульса свободного электромагнитного поля [11] и с требованием баланса потоков электромагнитной энергии при прохождении излучения через оптически активный слой [12].

Возможность новой записи (1) материальных уравнений, свободных от отмеченных противоречий, позволила в [7] поставить под сомнение справедливость проведенного в [9] феноменологического рассмотрения естественной оптической активности.

В данном сообщении мы установим взаимосвязь между различными формулировками материальных уравнений и уравнений поля в оптически активных кристаллах, проведем рассмотрение энергетических соотношений в рамках подхода [9], отличное от [4, 10], и покажем, что источником ряда затруднений в электродинамике таких сред является использование некорректных граничных условий.

2. В феноменологических материальных уравнениях и уравнениях поля в [9] в отличие от (1)—(5) члены, появляющиеся при усреднении микроскопических токов и ответственные за оптическую активность, предполагаются включенными в определение электрической индукции. Проведем такую процедуру непосредственно в системе феноменологических уравнений (1) — (5) путем переопределения векторов электрической индукции и магнитной напряженности (ср. также [13]).

Из (1), (4) имеем соотношение

$$\mathbf{H} = \mu^{-1}\mathbf{B} - \frac{\tilde{\alpha}}{c}\dot{\mathbf{D}}, \tag{6}$$

используя которое запишем уравнения Максвелла (4), (5):

$$\operatorname{rot}\mathbf{H}' = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}', \tag{7}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}' = 0. \tag{8}$$

Здесь переопределенные векторы магнитной напряженности $\mathbf{H}'$ и электрической индукции $\mathbf{D}'$ равны

$$\mathbf{H}' = \mu^{-1}\mathbf{B}, \tag{9}$$

$$\mathbf{D}' = \mathbf{D} + \operatorname{rot}\tilde{\alpha}\mathbf{D}. \tag{10}$$

С учетом (1) в результате несложных преобразований последнее соотношение перепишем в виде [1)]

$$\mathbf{D}' = \varepsilon\mathbf{E} + [\gamma\nabla, \mathbf{E}], \tag{11}$$

где тензор оптической активности второго ранга γ связан с тензорами α и ε в (1) следующим образом:

$$\gamma = \operatorname{Sp}(\tilde{\alpha}\varepsilon) - \tilde{\alpha}\varepsilon. \tag{12}$$

Обратное соотношение, выражающее тензор α через γ, будет

$$\alpha = \varepsilon^{-1}(^1/_2\operatorname{Sp}\gamma - \tilde{\gamma}). \tag{13}$$

Из формул (12), (13) следует, что тензор γ имеет тот же вид для различных классов симметрии кристаллов, что и тензор α. Для изотропной среды, в частности, соотношения (12), (13) сводятся к равенству $\gamma = 2\varepsilon\alpha$.

[1)] Здесь и везде в последующем рассмотрении удерживаются лишь члены первой степени по параметрам активности.

Для немагнитной среды $\mu = 1$ и $\mathbf{B} = \mathbf{H}'$. В результате вместо (7) запишем

$$\operatorname{rot}\mathbf{B} = \frac{1}{c}\dot{\mathbf{D}}'. \tag{14}$$

Рассмотрение естественной оптической активности в [9] основывалось на уравнениях Максвелла в форме (2), (14) и материальном уравнении вида (11), полученном при использовании принципа симметрии кинетических коэффициентов. Тем самым устанавливается эквивалентность двух формулировок материальных уравнений и снимаются возражения, выдвинутые в [7] против подхода [9].

3. Энергетическое рассмотрение электромагнитного поля в оптически активной среде с переопределенными векторами электрической индукции и магнитной напряженности можно произвести следующим образом. Воспользовавшись тождеством

$$[\gamma\nabla,\ \mathbf{E}] = \operatorname{Sp}\gamma\operatorname{rot}\mathbf{E} - \operatorname{rot}\gamma\mathbf{E} - \tilde{\gamma}\operatorname{rot}\mathbf{E},$$

перепишем (11) в виде

$$\mathbf{D}' = \varepsilon\mathbf{E} + ({}^1/_2\operatorname{Sp}\gamma - \tilde{\gamma})\operatorname{rot}\mathbf{E} + \operatorname{rot}({}^1/_2\operatorname{Sp}\gamma - \gamma)\mathbf{E}.$$

Уравнению (7) теперь можно придать форму

$$\operatorname{rot}\left\{\mathbf{H}' - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\gamma - \gamma\right)\dot{\mathbf{E}}\right\} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\varepsilon\mathbf{E} - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\gamma - \tilde{\gamma}\right)\dot{\mathbf{B}}\right\}. \tag{15}$$

Умножая левую и правую части уравнения (2) скалярно на $\mathbf{H}' - c^{-1}({}^1/_2\operatorname{Sp}\gamma - \gamma)\dot{\mathbf{E}}$, а левую и правую части уравнения (15) на $\mathbf{E}$ и вычитая из первого результата второй, получим

$$\operatorname{div}\frac{c}{4\pi}\left[\mathbf{E}\left\{\mathbf{H}' - \frac{1}{c}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\gamma - \gamma\right)\dot{\mathbf{E}}\right\}\right] =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{8\pi}\left\{\mathbf{E}\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{B}\mu^{-1}\mathbf{B} - \frac{2}{c}\mathbf{E}\left(\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\gamma - \tilde{\gamma}\right)\dot{\mathbf{B}}\right\}. \tag{16}$$

Равенство (16) показывает, что исходя из традиционной формы материальных уравнений для электромагнитного поля в оптически активных средах можно представить закон сохранения энергии с вектором Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{E}\mathbf{H}'] - \frac{1}{4\pi}\left[\mathbf{E},\ \left(\frac{1}{2}\operatorname{Sp}\gamma - \gamma\right)\dot{\mathbf{E}}\right], \tag{17}$$

который для непереопределенных полей, согласно (6), (9), принимает обычную форму $c[\mathbf{E}\mathbf{H}]/4\pi$.

4. Перейдем теперь к рассмотрению условий, налагаемых на электромагнитное поле на границе оптически активных сред, а точнее, обсудим изменения обычных граничных условий, связанные с переопределением магнитной напряженности и электрической индукции. При наличии границы между двумя средами, которые условно будем обозначать I и II, граничные условия для электрической и магнитной напряженностей свободного электромагнитного поля, как обычно, имеют вид

$$[(\mathbf{E}_{\mathrm{I}} - \mathbf{E}_{\mathrm{II}})\mathbf{q}] = 0, \tag{18}$$

$$[(\mathbf{H}_{\mathrm{I}} - \mathbf{H}_{\mathrm{II}})\mathbf{q}] = 0, \tag{19}$$

находящийся в соответствии с требованием непрерывности нормальной составляющей плотности потока энергии ($\mathbf{q}$ — вектор нормали к границе раздела сред).

Граничное условие для переопределенного вектора магнитной напряженности $\mathbf{H}'$ может быть получено из (19). Используя уравнения (6), (9) и соотношение (13), из (19) получаем условие

$$[(\mathbf{H}_{\mathrm{I}}' - \mathbf{H}_{\mathrm{II}}')\mathbf{q}] = \frac{1}{c}\left[\left\{\left(\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\gamma_{\mathrm{I}} - \gamma_{\mathrm{I}}\right)\dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{I}} - \left(\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\gamma_{\mathrm{II}} - \gamma_{\mathrm{II}}\right)\dot{\mathbf{E}}_{\mathrm{II}}\right\}\mathbf{q}\right], \tag{20}$$

которому должен подчиняться вектор переопределенной магнитной напряженности $\mathbf{H}'$ (магнитной индукции $\mathbf{B}$ при $\mu = 1$) на границе двух оптически активных сред. Аналогичным образом из обычного условия непрерывности нормальной составляющей электрической индукции $\mathbf{D}$, используя (10), (13), можно получить граничное условие для переопределенной индукции

$$(\mathbf{D}_{\mathrm{I}}' - \mathbf{D}_{\mathrm{II}}')\mathbf{q} = \mathrm{rot}\{{}^1/_2\mathrm{Sp}\,\gamma_{\mathrm{I}} - \tilde{\gamma}_{\mathrm{I}})\mathbf{E}_{\mathrm{I}} - ({}^1/_2\mathrm{Sp}\,\gamma_{\mathrm{II}})\mathbf{E}_{\mathrm{II}}\}\mathbf{q}. \tag{21}$$

Соотношения (20) и (21) совместно с (18) и обычным условием непрерывности нормальной составляющей вектора $\mathbf{B}$ представляют собой граничные условия для электромагнитного поля в традиционном подходе к описанию естественной оптической активности.

5. При использовании уравнений (9), (11) в теории оптической активности кристаллов часто не обращается внимание на то, что векторы $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{D}'$ являются переопределенными, отличными от обычных векторов $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$ в (1), и вместо (20) для $\mathbf{H}'$ применяется граничное условие вида (19). Последнее обстоятельство ведет к существенным последствиям. Отбрасывание членов с оптической активностью в (20) приводит к таким решениям граничной задачи, для которых не выполняется баланс потоков энергии на границе раздела оптически активной и неактивной сред. Это же сказывается и на результатах для поляризации отраженной и прошедшей волн через оптически активный слой.

В этой связи обратимся к работе [14]. В ней исследована возможность экспериментального обнаружения и измерения параметра оптической активности прозрачных одноосных кристаллов планальных классов по измерению эллиптичности отраженной волны. Если оптическая ось кристалла перпендикулярна плоскости падения, то из уравнений (2), (7), (18) и граничного условия (20) с отброшенной правой частью получаются следующие выражения для амплитудных множителей отраженной волны:

$$a_1 = \frac{\eta - \eta_e}{\eta + \eta_e}a, \qquad b_1 = \frac{\varepsilon_0\eta - n^2\eta_0}{\varepsilon_0\eta + n^2\eta_0}b + \frac{2ik\alpha_1 n\eta|\mathbf{a}|}{(\eta + \eta_e)(\varepsilon_0\eta + n^2\eta_0)}a, \tag{22}$$

где a и b — амплитудные множители падающей волны, $\eta = \mathbf{mq}$, $\eta_e = \mathbf{m}_e\mathbf{q}$, $\eta_0 = \mathbf{m}_0\mathbf{q}$, $\mathbf{m}_i = n_i\mathbf{n}$ — вектор рефракции, n_i — показатель преломления, $\mathbf{n}$ — волновая нормаль, k — волновое число для вакуума, $\mathbf{a} = [\mathbf{mq}]$, α_1 — параметр активности. При использовании же полного граничного условия (20) выражение для b_1 не изменяется, а a_1 оказывается равным

$$a_1 = \frac{\eta - \eta_e}{\eta + \eta_e}a + \frac{2ik\alpha_1 n\eta|\mathbf{a}|}{(\eta + \eta_e)(\varepsilon_0\eta + n^2\eta_0)}b. \tag{23}$$

Из (22) следует, что при $a = 0$ (электрический вектор падающей волны колеблется в плоскости падения) отраженная волна линейно поляризована, а при $b = 0$ (электрический вектор падающей волны колеблется в пло-

скости, перпендикулярной плоскости падения) — эллиптически поляризована, и отношение полуосей эллипса равно

$$\frac{x}{y} = \pm \frac{2a_1 kn\eta\,|\mathbf{a}|}{(\eta - \eta_e)(\varepsilon_0\eta + n^2\eta_0)}.$$

В то же время из (23) следует, что и при $a = 0$ отраженная волна должна быть эллиптически поляризованной с эллиптичностью

$$\frac{x}{y} = \pm \frac{2a_1 kn\eta\,|\mathbf{a}|}{(\eta + \eta_e)(\varepsilon_0\eta - n^2\eta_0)}.$$

Следовательно, измерение параметра оптической активности α_1 можно проводить не только при $b = 0$, но и в случае $a = 0$.

6. Уравнения свободного электромагнитного поля в среде инвариантны относительно так называемых дуальных преобразований: $\mathbf{D} \to \pm\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \to \mp\mathbf{D}$, $\mathbf{E} \to \pm\mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to \mp\mathbf{E}$. Представляется наиболее естественной формулировка материальных уравнений, согласующаяся с дуальной симметрией, внутренне присущей уравнениям Максвелла. Уравнения (1) — (5) инвариантны относительно преобразований $\mathbf{D} \to \pm\mathbf{B}$, $\mathbf{B} \to \mp\mathbf{D}$, $\mathbf{E} \to \pm\mathbf{H}$, $\mathbf{H} \to \mp\mathbf{E}$ и $\varepsilon \rightleftarrows \mu$, $\alpha \to \tilde{\alpha}$.

Описание электромагнитного поля в оптически активной среде с помощью уравнений (1) — (5) оказывается более удобным по сравнению с (2), (3), (7) — (9), (11) ввиду очевидной простоты граничных условий и выражения для вектора Пойнтинга, а также симметричной формы материальных уравнений, хотя в последнем варианте свойства немагнитной среды ($\mu = 1$) могут быть описаны лишь одним материальным уравнением (11) [9].

Заметим, что переход от (1) к дуально-несимметричной форме материальных уравнений вида (9), (11) не является единственным. Может быть предложена иная (дуальная (2), (3), (7) — (9), (11)) формулировка материальных уравнений и уравнений поля как результат переопределения электрической напряженности и магнитной индукции. Выражая $\mathbf{E}$ через $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ согласно (1), (2) и подставляя в (2), получим

$$\operatorname{rot} \varepsilon^{-1}\mathbf{D} = -\frac{1}{c}(\dot{\mathbf{B}} + \operatorname{rot} \alpha\dot{\mathbf{B}}). \tag{24}$$

С учетом соотношений (1), (4) уравнения (24), (3) запишутся в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}' \tag{25}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B}' = 0, \tag{26}$$

где

$$\mathbf{E}' = \varepsilon^{-1}\mathbf{D}, \tag{27}$$

$$\mathbf{B}' = \mu\mathbf{H} + [\beta\nabla,\ \mathbf{H}]. \tag{28}$$

Тензор β здесь определяется следующим образом

$$\beta = \operatorname{Sp}(\alpha\mu) - \alpha\mu = \varepsilon^{-1}\tilde{\gamma}\mu - \operatorname{Sp}(\varepsilon^{-1}\tilde{\gamma}\mu) + {}^1/_2[\operatorname{Sp}(\varepsilon^{-1}\mu) - \varepsilon^{-1}\mu]\operatorname{Sp}\gamma. \tag{29}$$

В результате свободное электромагнитное поле в непоглощающей анизотропной оптически активной среде может быть описано наряду с (4), (5) уравнениями Максвелла (25), (26) и материальными уравнениями (27), (28). Возможность такого варианта феноменологического описания оптической активности обусловлена тем, что переход к макроскопическим величинам можно провести путем включения в определение магнитной идук-

ции членов, возникающих при усреднении микроскопических токов, которые связаны с оптической активностью. При этом, очевидно, такая форма уравнений поля и материальных уравнений будет иметь те же особенности, что и (2), (3), (7) — (9), (11). В частности, аналогично (20), (21), граничные условия для $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$, согласно (18), (27), (28), (1), (29), имеют вид

$$[(\mathbf{E}_{\mathrm{I}}' - \mathbf{E}_{\mathrm{II}}')\mathbf{q}] = -\frac{1}{c}\left[\left\{\left(\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\beta_{\mathrm{I}} - \beta_{\mathrm{I}}\right)\dot{\mathbf{H}}_{\mathrm{I}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \left(\frac{1}{2}\mathrm{Sp}\,\beta_{\mathrm{II}} - \beta_{\mathrm{II}}\right)\dot{\mathbf{H}}_{\mathrm{II}}\right\}\mathbf{q}\right], \tag{30}$$

$$(\mathbf{B}_{\mathrm{I}}' - \mathbf{B}_{\mathrm{II}}')\mathbf{q} = \mathrm{rot}\,\{(^1/_2\mathrm{Sp}\,\beta_{\mathrm{I}} - \dot{\beta}_{\mathrm{I}})\mathbf{H}_{\mathrm{I}} - (^1/_2\mathrm{Sp}\,\beta_{\mathrm{II}} - \dot{\beta}_{\mathrm{II}})\mathbf{H}_{\mathrm{II}}\}\mathbf{q}. \tag{31}$$

Преобразования $\mathbf{B} \to \pm\mathbf{D}$, $\mathbf{H}' \to \pm\mathbf{E}'$, $\mathbf{D}' \to \mp\mathbf{B}'$, $\mathbf{E} \to \mp\mathbf{H}$, $\mu \rightleftarrows \varepsilon$, $\gamma \to \beta$ переводят (2), (3), (7) — (9), (11), (18), (20), (21) соответственно в (25), (26), (4), (5), (27), (28), (19), (30), (31). Тем самым, все результаты для одного из этих двух вариантов феноменологического описания оптической активности автоматически могут быть получены путем дуальных переходов в соответствующих формулах второго варианта.

Авторы благодарят Б. А. Сотского и Ф. И. Федорова за полезные обсуждения результатов работы.

Институт физики
Академии наук Белорусской ССР

Поступила в редакцию
20 мая 1971 г.

Литература

[1] М. В. Волькенштейн. Молекулярная оптика, Гостехиздат, 1951.
[2] H. Nakano, H. Kimura. J. Phys. Soc., Japan, 27, 519, 1969.
[3] К. Шефер. Теоретическая физика, 3, ч. 2, Оптика, ГОНТИ, 1938.
[4] Ф. И. Федоров. Оптика и спектроскопия, 6, 85, 1959.
[5] Б. В. Бокуть, Ф. И. Федоров. Оптика и спектроскопия, 6, 537, 1959.
[6] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров. К электродинамике оптически активных сред, Препринт ИФ АН БССР, Минск, 1970.
[7] В. Н. Александров. Кристаллография, 15, 996, 1970.
[8] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, Ф. И. Федоров. Кристаллография, 15, 1002, 1970.
[9] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, Физматгиз, 1959.
[10] В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, «Наука», 1965.
[11] Б. В. Бокуть. Изв. АН БССР, серия физ.-мат. наук, 4, 123, 1966.
[12] Б. В. Бокуть, Б. А. Сотский. Оптика и спектроскопия, 14, 117, 1963.
[13] R. M. Hornreich, S. Shtrikman. Phys. Rev., 171, 1065, 1968.
[14] Ф. И. Федоров, Б. В. Бокуть, А. Ф. Константинова. Кристаллография, 7, 910, 1962.

ON THE PHENOMENOLOGICAL THEORY OF NATURAL OPTICAL ACTIVITY

B. V. Bokut, A. N. Serdyukov

The interrelationship between various formulations of the material equations is investigated and the form of the boundary conditions in phenomenological electrodynamics of nonabsorbing optically active media is found.