

Д. В. РАНЧИН

О КОМПАКТНОСТИ ПО МОДУЛЮ ИДЕАЛА

(Представлено академиком П. С. Александровым 29 VI 1971)

В настоящей работе вводится понятие компактности по модулю идеала, доказывается аналог леммы Александера и обобщается теорема Тихонова о бикомпактности произведения бикомпактных топологических пространств; устанавливается связь введенных I -компактных пространств с H -замкнутыми пространствами и рассматривается один класс H -замкнутых расширений, включаемый в общую схему компактности по модулю идеала.

Напомним, что непустое семейство I подмножеств множества X называется идеалом, если I удовлетворяет условиям: 1) если $A \in I$ и $B \subset A$, то $B \in I$; 2) если $A, B \in I$, то $A \cup B \in I$.

Чтобы исключить тривиальный случай совпадения идеала с множеством всех подмножеств множества X , обычно предполагается, что $X \notin I$.

В топологии наибольший интерес представляют идеалы, построенные по какому-либо топологическому свойству подмножеств топологических пространств (наследственному и конечно-аддитивному). Например:

- 1) β — идеал нигде не плотных подмножеств;
- 2) $\mathcal{B}$ — идеал множеств первой категории,
- 3) $s(\tau)$ — идеал подмножеств мощности $\leq \tau$,
- 4) S — идеал подпространств со счетной сетью,
- 5) S — идеал подмножеств, лежащих в сепарабельных подпространствах,
- 6) Идеал подмножеств в нормальном пространстве таких, что $\dim[A] \leq n$.

Определение 1. Покрытие $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства X называется I -покрытием, если из него можно выделить конечную подсистему $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$, покрывающую все X , за исключением, быть может, некоторого множества, принадлежащего идеалу I , т. е.

$$(X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}) \in I.$$

Определение 2. Пространство называется I -компактным или компактным по модулю I , если любое открытое покрытие пространства является I -покрытием.

Компактность по модулю идеалов $s(\aleph_0)$ и S является, очевидно, усилением финальной компактности. Примером $s(\aleph_0)$ -компактного пространства является одноточечная финальная компактификация несчетного дискретного пространства. Другой пример пространства компактного по модулю идеалов $s(\aleph_0)$ и β получим, если в бикомпакте без изолированных точек усилием топологии, объявив все счетные множества замкнутыми.

Предложение 1. Для хаусдорфовых пространств β -компактность эквивалентна H -замкнутости.

Это очевидно ввиду критерия H -замкнутости П. С. Александрова ⁽¹⁾: хаусдорфово пространство X H -замкнуто тогда и только тогда, когда из любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства X можно выделить конечное число элементов $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$, так что $X = \bigcup_{i=1}^n [U_{\alpha_i}]$.

В дальнейшем, говоря об H -замкнутых пространствах, мы будем иметь в виду и использовать только это свойство покрытий. Покрытие простран-

ства, не являющееся I -покрытием, будем для краткости называть $\bar{I}$ -покрытием.

Лемма Александра для I -покрытий. Пусть $\mathfrak{A}$ — открытая предбаза топологического пространства X . Если в X имеется открытое $\bar{I}$ -покрытие, то найдется $\bar{I}$ -покрытие, составленное из элементов $\mathfrak{A}$.

Доказательство почти точно воспроизводит доказательство классической леммы Александра ⁽³⁾.

Действительно, обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех $\bar{I}$ -покрытий X . По предположению, $\mathfrak{M} \neq \Lambda$. Пусть $\{P_\alpha\}$ — монотонная трансфинитная последовательность элементов из $\mathfrak{M}$ (т. е. $P_\alpha \subset P_{\alpha'}$ при $\alpha < \alpha'$). Тогда $(\bigcup_\alpha P_\alpha) \in \mathfrak{M}$. В самом деле, очевидно, $\bigcup_\alpha P_\alpha$ — покрытие X . Это $\bar{I}$ -покрытие, так как в противном случае оно содержало бы конечное число элементов $G_1, \dots, G_n$ таких, что $(X \setminus \bigcup_{i=1}^n G_i) \in I$. Но тогда существовало бы P_β , что $G_i \in P_\beta$ для каждого $i = 1, \dots, n$, а поэтому было бы $P_\beta \notin \mathfrak{M}$, вопреки предположению. Из доказанного свойства $\mathfrak{M}$ следует, в силу леммы Цорна, что $\mathfrak{M}$ содержит максимальный элемент. Обозначим его через P . Таким образом, если H открыто и $H \notin P$, то существуют $G_1, \dots, G_n \in P_n$, так что

$$X \setminus (H \cup G_1 \cup \dots \cup G_n) \in I.$$

Покажем, что семейство открытых множеств, не принадлежащих P , является фильтром. Пусть $H_i \notin P$, $i = 1, 2$. Тогда

$$X \setminus (H_1 \cup G_1 \cup \dots \cup G_n) = A_1 \in I, \quad G_k \in P, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$X \setminus (H_2 \cup V_1 \cup \dots \cup V_m) = A_2 \in I, \quad V_j \in P, \quad j = 1, \dots, m.$$

Рассмотрим $X \setminus ((H_1 \cap H_2) \cup G_1 \cup \dots \cup G_n \cup V_1 \cup \dots \cup V_m) = B$. Легко видеть, что $B \subset A_1 \cup A_2$, а поэтому $B \in I$. Следовательно, $H_1 \cap H_2 \notin P$.

Если $H \notin P$, $H \subset G$, то легко видеть, что $G \notin P$.

Таким образом, доказано, что совокупность открытых множеств, не принадлежащих P , образует фильтр.

Для доказательства леммы достаточно показать, что $\mathfrak{A} \cap P$ является покрытием.

Пусть $x_0 \in X$. Так как P есть покрытие, то существует $G \in P$ такое, что $x_0 \in G$, а так как $\mathfrak{A}$ есть предбаза X , то существует конечная система $H_1, \dots, H_n$ элементов $\mathfrak{A}$ такая, что $x_0 \in H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n \subset G$. Следовательно, существует i такое, что $H_i \in P$, так как иначе $H_1 \cap \dots \cap H_n \notin P$, а тогда и $G \notin P$, вопреки предположению. Таким образом, $x_0 \in H_1 \in \mathfrak{A} \cap P$ и, следовательно, $\mathfrak{A} \cap P$ является покрытием X . Лемма доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть I — идеал в X и $Q \subset I$. Можно рассмотреть следующее свойство: для всякой системы $\{U_\alpha\}$ открытых множеств с условием $(X \setminus \bigcup_\alpha U_\alpha) \in Q$ можно выделить конечное число элементов $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$

таких, что $(X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}) \in I$. В случае, когда семейство Q наследственно, например, является идеалом, доказательство соответствующей леммы о предбазе аналогично.

Обобщенная теорема Тихонова. Пусть $\{X_s: s \in A\}$ — семейство топологических пространств, причем каждое X_s компактно по модулю идеала I_s в пространстве X_s . Пусть I — некоторый идеал в $X =$

$= \prod_{s \in A} X_s$ такой, что $\pi_s^{-1}(I_s) \subset I$ для каждого $s \in A$, где $\pi_s: X \rightarrow X_s$ — проекция (т. е. идеал I мажорирует идеал, базу которого составляют «цилиндры» над множествами из идеалов I_s).

Тогда X I -компактно.

Доказательство. Пусть γ — покрытие X из элементов стандартной предбазы. В силу доказанной леммы достаточно найти конечное число

$U_i, i = 1, \dots, n$, элементов этого покрытия таких, что $X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i \in I$. Для каждого $s_0 \in A$ обозначим γ_{s_0} семейство подмножеств V и X_{s_0} таких, что $\pi_{s_0}^{-1}(V) \in \gamma$. Тогда хотя бы одно из γ_s является покрытием X_s , ибо в противном случае, выбирая в каждом X_s по точке x_s , не покрываемой γ_s , мы смогли бы найти точку в X , не покрываемую γ , вопреки тому, что γ — покрытие. Таким образом, найдется $t_0 \in A$ такой, что γ_{t_0} является покрытием X_{t_0} . Тогда находим $U_1^{t_0}, \dots, U_n^{t_0} \in \gamma_{t_0}$ такие, что $(X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i^{t_0}) \in I_{t_0}$: рассматривая $U_i = \pi_i^{-1}(U_i^{t_0}) \in \gamma$, получим $(X \setminus \bigcup_{i=1}^n U_i) \in I$. Следовательно, X I -компактно.

З а м е ч а н и е. В случае идеала, состоящего только из пустого множества, получаем классическую лемму Александра и теорему Тихонова о бикомпактности произведения бикомпактных пространств.

С л е д с т в и е. *Произведение H -замкнутых пространств H -замкнуто.*

Действительно, идеал нигде не плотных множеств, как и идеал множеств первой категории, обладает требуемым свойством «цилиндричности». Полученное следствие хорошо известно (см., например, ⁽³⁾), где этот факт доказывается по-другому).

Отметим простой, но полезный факт: если пространство I -компактно и идеал I не содержит никакого открытого множества, то пространство β -компактно, т. е. H -замкнуто. В частности, рассмотрение пространств, компактных по модулю идеала множеств 1-й категории, сводится к рассмотрению H -замкнутых пространств ввиду следующей простой теоремы.

Т е о р е м а. *Если хаусдорфово пространство компактно по модулю идеала $\mathcal{B}$ множеств 1-й категории, то $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1 \cap X_2 = \Lambda$ и X_1 — множество 1-й категории, а X_2 — H -замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть X_1 — максимальное открытое множество 1-й категории в X . Такое существует в силу известной теоремы Банаха ⁽²⁾: объединение открытых множеств 1-й категории есть множество 1-й категории. Положим $X_2 = X \setminus X_1$. X_2 канонически замкнуто, $X_2 = [\text{Int } X_2]$, так как если остаток $X_2 \setminus [\text{Int } X_2] \neq \Lambda$, то, будучи нигде не плотным, он должен был бы войти в X_1 , вопреки $X_1 \cap X_2 = \Lambda$. Легко видеть теперь, что пространство X_2 компактно по модулю идеала своих подмножеств 1-й категории, так как идеал $\mathcal{B}$ в пространстве X высекает на X_2 идеал подмножеств 1-й категории. Поскольку в X_2 уже нет открытых множеств 1-й категории, то X_2 компактно по идеалу нигде не плотных в X_2 подмножеств, т. е. X_2 H -замкнуто.

Рассмотрим еще один класс I -компактных пространств.

О п р е д е л е н и е 3. Хаусдорфово расширение δX пространства X называется относительно бикомпактным расширением, если для любого открытого покрытия $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства δX найдется конечное число элементов, покрывающих X , т. е. $\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i} \supset X$. Иными слова-

ми, δX компактно по модулю идеала подмножеств, лежащих в $\delta X \setminus X$. Ясно, что относительно бикомпактное расширение является H -замкнутым и регулярное относительно бикомпактное расширение бикомпактно.

П р и м е р 1 относительно бикомпактного, но не бикомпактного расширения вполне регулярного пространства. X — открытый круг в евклидовой плоскости, δX как множество точек совпадает с замкнутым кругом. Типичная окрестность точки $x_0 \in \delta X \setminus X$ получается, если из обычной окрестности точки x_0 в замкнутом круге с топологией, индуцированной из плоскости, выкинуть все точки граничной окружности, кроме, конечно, самой точки x_0 . Таким образом, на $\delta X \setminus X$ индуцируется дискретная топология. Топология же в X остается обычной евклидовой. Легко видеть, что δX — относительно бикомпактное расширение X , не являющееся бикомпактным.

Пример 2. H -замкнутое пространство, не являющееся относительно бикompактным расширением никакого своего всюду плотного подмножества, получим, усилив топологию в обычном отрезке, объявив все нигде не плотные множества замкнутыми.

Используя обобщенную теорему Тихонова, получаем, что свойство: «пространство является относительно бикompактным расширением некоторого своего всюду плотного подмножества» сохраняется при произведении.

Предложение 2. *Относительная бикompактность расширения δX эквивалентна условию: для любой централизованной системы подмножеств пространства X $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ имеем всегда $\bigcap_{\alpha \in A} [F_\alpha]_{\delta X} \neq \Lambda$.*

Предложение 3. *Если сепарабельное пространство X является бикompактным относительно любого своего счетного всюду плотного подмножества, то X счетно-компактно.*

Таким образом, если X , кроме того, удовлетворяет первой аксиоме счетности, то X — бикompакт, так как счетно-компактное пространство с 1-й аксиомой счетности регулярно ⁽¹⁾.

Пример 3. Небикompактное сепарабельное пространство X , являющееся относительно бикompактным расширением любого своего счетного всюду плотного подмножества. Как показано И. Паровиченко ⁽⁵⁾, каждый бикompакт веса $\leq \aleph_1$ является наростом некоторого бикompактного расширения натурального ряда N , и мы можем рассмотреть бикompактное расширение bN натурального ряда, в котором наростом служит пространство Ω всех порядковых чисел до первого несчетного числа ω_1 включительно. Пусть X_i ($i = 1, 2$) — два экземпляра этого бикompакта. Точки первого будем обозначать $(x, 1)$, а второго $(x, 2)$. Склеим X_1 и X_2 по $\Omega \setminus \{\omega_1\}$. Точнее, рассмотрим разбиение свободной суммы $X_0 = X_1 \oplus X_2$, неодноточечными элементами которого будут двухэлементные множества вида $\bar{a} = \{(a, 1)\} \cup \{(a, 2)\}$, где $a \in \Omega \setminus \{\omega_1\}$. Искомое пространство X получим, изменив, как будет описано ниже, топологию в точках $(\omega_1, 1)$ и $(\omega_1, 2)$ в фактор-пространстве. Через $O_z(p)$ обозначается окрестность точки p в пространстве Z .

Типичная окрестность точки (ω_1, i) в пространстве X выглядит так: $O_x(\omega_1, i) = (O_{x_i}(\omega_1, i) \cap N_i) \cup \{(\omega_1, i)\}$, где N_i — экземпляр натурального ряда, вложенный в X_i так, что $X_i = bN_i$. В пространстве X в точках $(\omega_1, 1)$ и $(\omega_1, 2)$ нарушается регулярность и ясно, что X — не бикompакт. Легко видеть, что пространство X H -замкнуто. Пусть теперь A — произвольное счетное всюду плотное множество в X и $\gamma = \{U_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие. Докажем, что найдется конечное число элементов из γ , покрывающих A . Так как точки из N_1 и N_2 изолированы в X , то любое всюду плотное множество включает $N_1 \cup N_2$. В силу H -замкнутости X найдется конечное число элементов покрытия γ так, что $\bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$ всюду плотно в

X , и, следовательно $N_1 \cup N_2 \subset \bigcup_{i=1}^n U_{\alpha_i}$. Остается еще некоторое множество точек из A , лежащее в $X \setminus (N_1 \cup N_2)$ и, возможно, не покрытое U_{α_i} ($i = 1, \dots, n$). Но поскольку замыкание любого счетного множества в $X \setminus (N_1 \cup N_2)$ бикompактно, то найдутся $U_{\alpha_{n+1}}, \dots, U_{\alpha_{n+k}}$ так, что $A \subset \bigcup_{i=1}^{n+k} U_{\alpha_i}$, что и требовалось доказать.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ П. С. Александров, П. С. Урысон, Мемуар о компактных топологических пространствах, М., 1971. ² К. Куратовский, Топология, 1, М., 1966. ³ К. Куратовский, Топология, 2, М., 1969. ⁴ H. Herrlich, Math. Zs., 88, № 3 (1965). ⁵ И. И. Паровиченко, ДАН, 150, № 1, 36 (1963).