

В. С. РЯБЕНЬКИЙ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕЛЕНИЯ С ОСТАТКОМ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ МНОГИХ АРГУМЕНТОВ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 28 VI 1971)

Будем говорить, что $P_M(x) \equiv P_M(x_1, \dots, x_s)$ есть многочлен с носителем M , если

$$P_M(x) = \sum_{n \in M} p_n x^n, \quad x^n \equiv x_1^{n_1} \dots x_s^{n_s}, \quad (1)$$

где $P(x)$, $A(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ — соответственно делимое, делитель, частное и целочисленными координатами $n_1, \dots, n_s$, а p_n — комплексные коэффициенты.

Как известно, для обычных многочленов одного переменного $P(x)$ и $A(x)$ существует связь

$$P(x) = A(x)q(x) + r(x), \quad (2)$$

где $P(x)$, $A(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ — соответственно делимое, делитель, частное и остаток, причем степень остатка всегда меньше степени делителя, так что носитель остатка зависит только от делителя. В случае многочленов двух или более аргументов подобная (2) запись не имеет места, даже если в качестве носителя остатка взять любое конечное множество, зависящее от делителя $A(x)$, но не зависящее от делимого $P(x)$.

Переходим к построениям, имеющим целью естественное, на наш взгляд, обобщение понятия деления с остатком, пригодное в случае многочленов от нескольких переменных. Это обобщение, как будет показано, содержится и в случае деления многочленов от одного переменного.

По произвольным конечным множествам D_0 и K точек с целочисленными координатами s -мерного пространства определим соответствующие множества D , K_r , Γ и Γ' . Именно: D — множество точек, которое пробегает $n + k$, если n и k пробегают независимо соответственно D_0 и K ; каждой точке $r \in D$ сопоставим множество K_r тех точек $k \in K$, для которых $r - k \in D_0$; Γ — множество тех точек $r \in D$, для которых K_r непусто; Γ' — множество точек, которое пробегает $r - k$, если r пробегает Γ , а k при каждом фиксированном r пробегает K_r .

Пусть задан многочлен (1) и многочлен

$$A(x) = \sum_{k \in K} A_k x^{-k}, \quad (3)$$

носитель которого есть множество $-K$. Зададим множество D_0 произвольно, но так, чтобы имело место включение $M \subset D_0 \cup \Gamma'$.

Теорема 1. *Справедливо тождество*

$$P_M(x) \equiv A(x)Q_D(x) + R_{\Gamma'}(x), \quad (4)$$

где коэффициенты q_n и r_γ многочленов $Q_D(x)$ и $R_{\Gamma'}(x)$ определены соответственно равенствами

$$q_n = \sum_{\gamma \in \Gamma'} G_{n-\gamma} p_\gamma + \sum_{m \in D_0} G_{n-m} p_m, \quad n \in D; \quad (5)$$

$$r_\gamma = p_\gamma - \tilde{p}_\gamma, \quad \tilde{p}_\gamma = \sum_{r \in \Gamma} \sum_{k \in K_r} \delta_{r-k}^\gamma A_k q_r, \quad \gamma \in \Gamma'. \quad (6)$$

Здесь G_n — решение уравнения

$$\sum_{k \in K} A_k G_{n+k} = \delta_n^0. \quad (7)$$

Теорема 2. Если многочлен $P_M(x)$ делится на $A(x)$, т. е. $P_M(x) = A(x)Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый многочлен, то независимо от выбора решения G_n уравнения (7) в равенстве (4) окажется $Q_D(x) = Q(x)$, а $R_{\Gamma'}(x) = 0$.

Лемма. В случае $s = 1$ уравнение (7) имеет одно и только одно решение G_n , обращающееся в нуль при $n \geq 0$. Это решение задается формулой

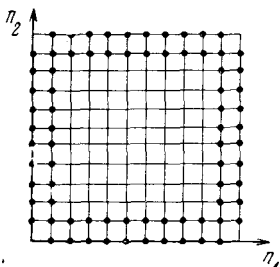


Рис. 1

$$G_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\xi|=R} \frac{A^{-1}(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi, \quad (8)$$

где радиус R окружности интегрирования выбран настолько большим, чтобы все корни уравнения $A(x) = 0$ лежали внутри нее.

Теорема 3. Пусть $s = 1$ и

$$P_M(x) = p_0 + p_1 x + \dots + p_M x^M, \quad (9)$$

$$A(x) = a_0 + a_{-1}x + \dots + a_{-K}x^K, \quad (10)$$

где M и K — некоторые натуральные числа, причем, не ограничивая общности, будем считать $M \geq 2K$. (Коэффициент p_M может быть равным нулю.)

При выборе в качестве G_n функции (8), а в качестве D_0 множества точек $\{K, K+1, \dots, M-K\}$ многочлены $Q_D(x)$ и $R_{\Gamma'}(x)$ в формуле (4) совпадают соответственно с многочленами $q(x)$ и $r(x)$ в формуле (2), т. е. с частным и остатком от деления многочлена (9) на многочлен (10) в обычном смысле.

Сформулированные теоремы делают естественным следующее определение деления с остатком многочленов от нескольких переменных, $s \geq 1$.

Определение. Частным и остатком от деления многочлена (1) на многочлен (3) при выбранных D_0 и решении G_n уравнения (7) будем называть соответственно многочлены $Q_D(x)$ и $R_{\Gamma'}(x)$, определенные формулами (5) и (6).

Пример. Пусть $s = 2$, носитель делимого M состоит из точек $n = (n_1, n_2)$, $0 \leq n_j \leq N$, а делитель имеет вид $A(x) = \sum_{i,j=0}^1 a_{ij} x_1^i x_2^j$. Примем за D_0 множество точек $2 \leq n_j \leq M-2$. Тогда носитель частного совпадает с носителем делимого. Носитель остатка Γ' составят граничные и приграничные точки квадрата M , отмеченные точками (рис. 1).

Теорема 4. При произвольном делителе (3) существует такое решение уравнения (7), что для коэффициентов частного $Q_D(x)$ и остатка $R_{\Gamma'}(x)$ справедливо неравенство

$$\max_{n \in D} |q_n| + \max_{\gamma \in \Gamma'} |r_\gamma| \leq C \max_{m \in D_0} |m|^\alpha \cdot \max_{m \in M} |p_m|, \quad (11)$$

где $C \geq 0$ и $\alpha \geq 0$ — некоторые постоянные, не зависящие ни от делимого, ни от выбора D_0 , $M \subset D_0 \cup \Gamma'$.

Теорема 5. Пусть $A(x)$ не обращается в нуль при $|x_i| = \dots = |x_s| = 1$.

Тогда при использовании следующего решения уравнения (7)

$$G_n = \frac{1}{(2\pi i)^s} \oint_{|x_j|=1} \dots \oint \frac{A^{-1}(x)}{x_1^{n_1+1} \dots x_s^{n_s+1}} dx_1 \dots dx_s \quad (12)$$

в неравенстве (11) можно положить $\alpha = 0$.

Обозначим через d_M диаметр наибольшего шара в пространстве $(x_1, \dots, x_s)$, все точки $n = (n_1, \dots, n_s)$ которого, имеющие целочисленные координаты, принадлежат M .

Теорема 6. Пусть $A(x^0) = 0$, $|x_1^0| = \dots = |x_s^0| = 1$.

Тогда при любом M существует многочлен $P_m(x)$ с носителем M , который делится на $A(x)$ без остатка и для которого коэффициенты частного удовлетворяют следующей оценке снизу:

$$\max_n |q_n| \geqslant c d_M \max_{m \in M} |p_m|,$$

где $c > 0$ зависит только от делителя $A(x)$, но не зависит от множества M .

Для выяснения вопроса о делимости многочлена $P_m(x)$ на многочлен $A(x)$ и для вычисления частного полезно следующая

Теорема 7. Пусть в качестве D_0 выбран гиперкуб, состоящий из всех тех точек n , которые удовлетворяют неравенству

$$\|n\| \leqslant \max_{m \in M} \|m\| + 2 \max_{k \in K} \|k\|.$$

Пусть, далее, для разностного уравнения

$$\sum_{k \in K} A_k u_{n+k} = p_n, \quad n \in D_0, \quad (13)$$

некоторая краевая задача

$$lu_\Gamma = \varphi \quad (14)$$

имеет единственное решение при любом φ , $\varphi \in \Phi$, где Φ — линейное пространство, которое пробегает lu_Γ , когда u_Γ пробегает линейное пространство всех сеточных функций, определенных на Γ .

$P_m(x)$ делится на $A(x)$ без остатка в том и только том случае, если решение $\{u_n\}$, $n \in D$, задачи (13), (14) при $\varphi = 0$ обращается в нуль на Γ . Коэффициенты q_n искомого частного в этом случае совпадают со значениями u_n .

Введенное нами понятие деления с остатком полезно даже в случае многочленов от одного переменного. Поясним это примером деления на $A(x) = x - 10$. Пусть многочлен (9) делится на $x - 10$ без остатка, так что по теореме Безу $P_M(10) = 0$. Но если задать коэффициент p_M с ошибкой $+\varepsilon$, то остаток будет $10^M \varepsilon$ и быстро возрастает при возрастании M . Коэффициенты частного тоже получились бы грубо неправильными. В этом случае для устойчивости деления надо было бы делить на $-10 + x$, начиная со свободного члена. Остатком тогда окажется многочлен вида $r_M \cdot x^M$.

Общее решение уравнения (7) в рассматриваемом случае имеет вид

$$G_n = \begin{cases} c \cdot 10^{-n}, & n \geqslant 0, \\ 10^{-1-n} + c \cdot 10^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

Если за D_0 принять множество $\{1, 2, \dots, M-1\}$, то обычное деление получается при использовании в формуле (5) решения G_n со значением $c = 0$, т. е. формулы (8), а устойчивое деление получается при выборе G_n по формуле (12), т. е. при $c = -1/10$.

Рассмотрим еще, например, случай, когда делитель есть многочлен второй степени. Если оба его корня меньше единицы по модулю, то формулы (8) и (12) совпадают и обычное определение остатка и процедура деления углом устойчивы. Если один или оба корня по модулю больше единицы, то (8) и (12) не совпадают, формулы (5), (6), (12) приводят соответственно к остаткам вида $r_{M-1}x^{M-1} + r_M x^M$ и $r_M x^M + r_{M-1}x^{M-1} + r_1 x_1 + r_0$, которые мало чувствительны к ошибкам округления в силу теоремы 5.

Устойчивая процедура деления в первом из этих двух случаев состоит в делении, начиная со свободного члена. Можно, конечно, воспользоваться также формулами (5), (6). Во втором случае, помимо формул (5), (6), пригоден путь, указанный в теореме 7. Возникающее разностное уравнение второго порядка решается прогонкой при нулевых значениях u_n в концевых точках.

В (4) рассмотрен более общий случай, когда коэффициенты многочлена (1) являются векторами, а коэффициенты делителя (3) — матрицами соответствующего порядка.

Автор выражает благодарность М. И. Граеву за обсуждение результатов.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
29 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. С. Рябенский, Депон. рукоп. ВИНТИ, № 635—69.