

Я. И. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ

**О КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ
ВОЛНАХ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ, ВЫЗВАННЫХ ДАВЛЕНИЕМ,
ПЕРИОДИЧЕСКИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПОТОКА
ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ**

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 10 VI 1971)

Дается точное решение задачи, если давление на поверхности задано некоторым бесконечным тригонометрическим рядом. Исследуется и особый случай, когда длина волны заданного давления совпадает с длиной установившейся свободной линейной волны, отвечающей взятой скорости потока и постоянному давлению вдоль поверхности. При тождественном обращении в нуль переменной части распределенного по поверхности давления рассматриваемые здесь волны перестают существовать и течение переходит в равномерный поток. Такие волны названы вынужденными ⁽¹⁾ в отличие от свободных, существующих при постоянном давлении вдоль поверхности. Здесь кратко излагаются полученные нами результаты. Аналогичная задача для жидкости бесконечной глубины была рассмотрена нами ранее ^(2, 3). Здесь, как и для случая бесконечной глубины, задача сводится к решению некоторого нелинейного интегрального уравнения.

Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости конечной постоянной глубины h , ограниченной сверху свободной поверхностью, на которой давление $p_0 = p'_0 + p_0(x)$; здесь $p'_0 = \text{const}$, а $p_0(x)$ является заданной периодической функцией от горизонтальной координаты x . Предположим, что поток обладает на горизонтальном дне постоянной заданной средней скоростью c , направленной слева направо. Благодаря периодически распределенному давлению поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющей скорость $-c$.

Пусть искомая волна и давление $p_0(x)$ обладают одинаковой симметрией относительно вертикали гребня. Совместим ось Oy с осью симметрии и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси Oy со свободной поверхностью, а ось Ox направим вправо. Плоскость течения xOy примем за плоскость комплексного переменного $z = x + iy$. Введем обычные обозначения: φ — потенциал скоростей; ψ — функция тока; $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал скоростей.

Для вывода из граничного условия основного уравнения задачи сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и представляющую собой вертикальный прямоугольник, ограниченный сверху волнообразной кривой, на прямоугольник $0 \leq \varphi \leq c\lambda$, $0 \leq \psi \leq \psi_0$ в плоскости w (здесь $\psi = \psi_0$ — расход потока в единицу времени), а затем этот прямоугольник — на внутренность кругового кольца с центром в нуле плоскости $u = u_1 + iu_2$. При этом предполагается, что длина волны λ совпадает с периодом функции $p_0(x)$. Как известно, последнее отображение дается формулой

$$w = \frac{\lambda c}{2\pi i} \ln u. \quad (1)$$

При этом отрезок $0 \leq \varphi \leq c\lambda$, отвечающий свободной поверхности, перейдет в окружность внешнего круга единичного радиуса, а отрезок, соответствующий дну, перейдет в окружность внутреннего круга радиуса $r_0 = \exp(-2\pi\psi_0/\varphi_0) = \exp(-2\pi h/\lambda)$, меньшего единицы. Кольцо будет иметь разрез вдоль отрезка $(r_0, 1)$.

Выражение z через u определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\lambda}{2\pi i} \frac{f(u)}{u}. \quad (2)$$

Функция $f(u)$ представляется рядом Лорана внутри рассматриваемого кольца плоскости u . Коэффициенты этого ряда должны быть действительны в силу симметрии волны, при этом удовлетворится и граничное условие непротекания на дне.

Как обычно, вводя функцию (1)

$$\omega(u) = \Phi + i\tau = -i \ln f(u), \quad (3)$$

из (2) и (3) находим при $u = e^{i\theta}$ (θ — угол радиуса-вектора с осью u_1) дифференциальное соотношение; отделяя в нем действительные и мнимые части и интегрируя, получим параметрическое уравнение профиля волны

$$x = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \cos \Phi(\eta) d\eta, \quad y = -\frac{\lambda}{2\pi} \int_0^\theta e^{-\tau(\eta)} \sin \Phi(\eta) d\eta. \quad (4)$$

Из формул (3), (2) и (1) следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу вектора скорости $\mathbf{q}$ с осью Ox и что

$$q = |\mathbf{q}| = c \exp(\tau). \quad (5)$$

В силу симметрии искомой волны функция $\tau(\theta)$ четная, а $\Phi(\theta)$ нечетная. Поэтому имеем разложения

$$-\tau(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\theta, \quad \Phi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta; \quad (6)$$

$$A_n = \frac{v_n''}{n} B_n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (7)$$

$$v_n'' = n \operatorname{cth}(2\pi n h/\lambda), \quad v_n' v_n'' = n^2.$$

Из интеграла Бернулли для поверхности, учтя по закону Лапласа силы поверхностного натяжения, после преобразований получим

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = v \left[\delta e^{-\tau} - e^\tau - \frac{2\pi}{\lambda} \kappa y e^{-\tau} - p_0^*(x) e^{-\tau} \right], \quad (8)$$

$$v = \lambda c^2 \rho / (4\pi \mu), \quad \delta = 2(C\rho - p_0') / (\rho c^2), \quad (9)$$

$$\kappa = g\lambda / (\pi c^2), \quad p_0^*(x) = 2p_0(x) / (\rho c^2);$$

C — константа в интеграле Бернулли, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность, μ — капиллярная постоянная. В (8) y определяется второй формулой (4). Выделив в правой части (8) слагаемые, линейные относительно Φ и τ , получаем

$$\frac{d\Phi}{d\theta} = v \left\{ \delta - 1 - (\delta + 1)\tau + \int_0^\theta \Phi(\eta) d\eta - S(\theta)(1 - \tau) + F[\tau, \Phi, S, \delta] \right\}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} F[\tau, \Phi, S, \delta] = & \delta(e^{-\tau} - 1 + \tau) - (e^\tau - 1 - \tau) + \\ & + \kappa e^{-\tau} \int_0^\theta [e^{-\tau(\eta)} \sin \Phi - \Phi(\eta)] d\eta - \kappa \int_0^\theta \Phi(\eta) d\eta + \\ & + \kappa e^{-\tau} \int_0^\theta \Phi(\eta) d\eta - S(\theta)(e^{-\tau} - 1 + \tau). \end{aligned}$$

Здесь предполагается, что с точностью до константы, включенной в p'_0 ,

$$p_0^*(x) = S(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n d_n \cos n\theta, \quad (11)$$

где ε — малый положительный безразмерный параметр, d_n — заданные действительные числа, причем ряд $\sum \varepsilon^n d_n$ сходится в круге $\varepsilon_0 > 0$. Заметим, что в исходной задаче $p_0^*(x)$ — заданная периодическая функция от x . В (2) указана связь между исходной задачей и задачей при условии (11).

Преобразуем линейные слагаемые в (10), применяя формулы, обобщающие известные формулы Дини для круга (1), и интегрирование по частям. Затем объединяем слагаемые с одинаковой подынтегральной функцией $d\Phi/d\eta$ и с разными ядрами $K(\eta, \theta)$ и

$$K_2(\eta, \theta) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\eta \cos n\theta}{n^2}.$$

В уравнении (10) константы ν и κ считаются заданными, а δ определяется из условия периодичности $\Phi(\theta + 2\pi) = \Phi(\theta)$. Так как $S(\theta)$ задается формулой (11), то решение уравнения (10) и, следовательно, δ будет зависеть от ε . Положив в (10)

$$\delta = \delta_0 + \delta'(\varepsilon), \quad (12)$$

найдем, что $\delta_0 = 1$ из условия периодичности при $\varepsilon \rightarrow 0$.

После всех преобразований и с учетом (12) уравнение (10) примет окончательный вид

$$\begin{aligned} \zeta(\theta) = \nu \left\{ \int_0^{2\pi} K^*(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta + \delta'(\varepsilon) + (2 + \delta'(\varepsilon)) A_0 + \right. \\ \left. + \delta'(\varepsilon) \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta + \kappa \int_0^{2\pi} K_2(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta - \right. \\ \left. - S(\theta) \left[1 + A_0 + \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta \right] + F[\tau, \Phi, S, 1 + \delta'(\varepsilon)] \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Здесь $d\Phi/d\theta = \zeta(\theta)$,

$$K^*(\eta, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\eta) \varphi_n(\theta)}{\nu_n}, \quad \nu_n = \frac{n^2}{2\nu_n'' - \kappa}, \quad \varphi_n(\theta) = \frac{\cos n\theta}{\sqrt{\pi}}; \quad (14)$$

ν_n — собственные значения, $\varphi_n(\theta)$ — собственные функции ядра $K^*(\eta, \theta)$.

Если считать, что в выражении F функция $\tau(\theta)$ взята из (1) и $\Phi(\theta) = \int_0^\theta (d\Phi/d\eta) d\eta$, то (13) будет нелинейным интегральным уравнением для $\zeta(\theta) = d\Phi/d\theta$.

Условие периодичности функции $\Phi(\theta)$ дает соотношение

$$\begin{aligned} \delta'(\varepsilon) = -\kappa \int_0^{2\pi} K_2(\eta, 0) \zeta(\eta) d\eta - (2 + \delta'(\varepsilon)) A_0 + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ S(\theta) \left[1 + A_0 + \int_0^{2\pi} K(\eta, \theta) \zeta(\eta) d\eta \right] - F[\tau, \Phi, S, 1 + \delta'(\varepsilon)] \right\} d\theta. \quad (15) \end{aligned}$$

Из (6) и (7) следует, что, определив $\Phi(\theta)$, найдем все B_n и A_n , кроме A_0 . Для A_0 имеем уравнение (4)

$$\exp(-A_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp[-\tau(\eta) - A_0] \cos \Phi(\eta) d\eta; \quad (16)$$

при этом $-\tau(\eta) - A_0$ в силу (6) не содержит A_0 .

Таким образом, задача свелась к определению функции $\zeta(\theta, \varepsilon)$, константы $\delta'(\varepsilon)$ и коэффициента $A_0(\varepsilon)$ из системы уравнений (13), (15) и (16). При этом $\Phi(\theta, \varepsilon) = \int_0^\theta \zeta(\eta, \varepsilon) d\eta$. При решении приходится рас-

сматривать два случая: в первом случае $v \neq v_n$, во втором $v = v_n$. Отметим, что $v = v_n$ является тем особым случаем, который указан в начале статьи. Действительно, при $v = v_n$ из (9) и (14) получается известная формула, связывающая κ и λ в указанном особом случае.

В первом случае решение $\zeta(\theta, \varepsilon)$, $A_0(\varepsilon)$ и $\delta'(\varepsilon)$ строится в виде рядов по целым степеням параметра ε . Во втором случае в качестве примера рассмотрено значение $v = v_1$. Здесь решение получается в виде рядов по степеням $\varepsilon^{1/3}$. В обоих случаях, применяя методы Ляпунова — Шмидта ⁽⁵⁾, доказываем, что эти ряды абсолютно и равномерно сходятся при $0 \leq \theta \leq 2\pi$ и малых значениях $|\varepsilon| < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0$ и дают единственное малое относительно ε и непрерывное по θ решение задачи.

Относительно случая $v = v_n$ отметим еще, что в силу (14) v_n зависит от параметра κ и, как можно показать, при некоторых κ — бифуркационных — собственное значение v_n будет двукратным. Кроме того, оно может быть и отрицательным. Параметр $v > 0$ согласно (9). Здесь параметр κ выбран так, чтобы собственное значение v_1 было простым и положительным.

Профиль волны в параметрической форме дается соотношениями (4). Исключая из них θ , получаем уравнение профиля в форме $y = y(x, \varepsilon)$. Приводим приближенные с точностью до членов третьего порядка уравнения профиля волны в обоих случаях, положив $k = 2\pi/\lambda$.

В случае $v \neq v_n$

$$y(x, \varepsilon) = \frac{1}{k} \left\{ \varepsilon C_{11} (\cos kx - 1) + \frac{\varepsilon^2}{4} \left(\frac{1}{v_1'} C_{11}^2 - C_{22} \right) (1 - \cos 2kx) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{6} \left[6C_{13} + \frac{9}{8} \left(1 - \frac{1}{v_1'^2} \right) C_{11}^3 + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{v_1'} - \frac{1}{v_2'} \right) C_{11} C_{22} \right] (\cos kx - 1) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^3}{6} \left[\frac{2}{3} C_{33} + \frac{1}{8} \left(\frac{5}{v_1'^2} - \frac{7}{3} \right) C_{11}^3 - \left(\frac{1}{v_1'} + \frac{1}{2v_2'} \right) C_{11} C_{22} \right] (\cos 3kx - 1) \right\}, \quad (17)$$

$$C_{11} = \frac{vv_1 d_1}{v - v_1}, \quad C_{22} = \frac{vv_2}{v - v_2} \left(d_2 + \frac{d_1}{2v_1'} C_{11} + \frac{3}{4} \kappa C_{11}^2 \right),$$

$$C_{13} = \frac{vv_1}{v_1 - v} C_{13}^*, \quad C_{33} = \frac{vv_3}{v_3 - v} C_{33}^*.$$

Здесь C_{13}^* и C_{33}^* — линейные функции от C_{11}^3 , $C_{11}C_{22}$, $C_{22}d_1$, $C_{11}d_2$, $C_{11}^2d_1$, а C_{33}^* — еще от d_3 .

В случае $v = v_1$ выражение для $y(x, \varepsilon)$ получится из (17), если в нем ε заменить на $\varepsilon^{1/3}$. Коэффициенты C_{ij} будут иметь другие значения.

По условию задачи начало координат помещено в гребне волны. Поэтому из анализа главных членов в формулах для $y(x, \varepsilon)$ и, полагая $v_1 < v < v_2$, заключаем, что надо считать $d_1 > 0$.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
8 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. И. Секерж-Зенькович, Прикл. матем. и мех., 33, в. 4 (1969). ² Я. И. Секерж-Зенькович, ДАН, 195, № 2, 303 (1970). ³ Я. И. Секерж-Зенькович, Прикл. матем. и мех., 34, в. 6, 1085 (1970). ⁴ А. И. Некрасов, Точная теория воли установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, Изд. АН СССР, 1951; Собр. соч., 1, Изд. АН СССР, 1961. ⁵ М. М. Вайнберг, В. А. Треногич, УМН, 17, в. 2 (104), 13 (1962).