

2. Детектирующая антенна терагерцового диапазона / А. К. Есман, В. К. Кулешов, Г. Л. Зыков // Патент Республики Беларусь на полезную модель № 7220 // Афіцыйны бюл. Нац. Цэнтр інтэлектуал. уласнасці. – 2011. – № 2.

3. Zhu, L. 3-D Printed THz Waveguide Components / L. Zhu [et al.] // IEEE Access. – 2023. – Vol. 11. – P. 79073–79086.

4. Есман, А. К. Терагерцовый приемник на основе электромагнитных материалов / А. К. Есман, В. К. Кулешов, Г. Л. Зыков // Измерительная техника. – 2013. – № 7. – С. 55–57.

В. Н. Капшай, Л. А. Гурченко, А. А. Шамына

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь

СВОЙСТВО РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ БИИЗОТРОПНЫХ СРЕД

Введение. Уравнения Максвелла электродинамики биизотропных сред могут быть сведены, путём исключения части неизвестных полей, к уравнению в частных производных второго порядка, содержащему ротор искомого поля, то есть, отличающемуся от стандартного волнового уравнения (а в монохроматическом случае от уравнения Гельмгольца) наличием дифференциального оператора «ротор». Этот оператор «перепутывает» компоненты искомого поля, что приводит к существенному усложнению задачи нахождения пространственных зависимостей полей. В работе показано, что решения таких уравнений обладают важным свойством, которое существенно упрощает задачу нахождения пространственной зависимости полей, особенно в задачах с использованием криволинейных координат.

1. Постановка задачи и математическая модель. Материальные уравнения электродинамики биизотропных сред имеют вид [1]

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} + (\chi + i\alpha) \vec{H}; \quad \vec{B} = (\chi - i\alpha) \vec{E} + \mu \vec{H}. \quad (1)$$

где $\vec{E}(\vec{H})$ – напряженность электрического (магнитного) поля;

$\vec{D}(\vec{B})$ – индукции этих полей, соответственно;

ε и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;

χ и α – параметры, описывающие магнитоэлектрический эффект (электрический либо магнитный отклик на электрическое или магнитное поле).

Такие материальные уравнения позволяют преобразовать уравнения Максвелла без источников

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(t, \vec{x}) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[(\chi - i\alpha) \vec{E}(t, \vec{x}) + \mu \vec{H}(t, \vec{x}) \right]; \\ \vec{\nabla} \times \vec{H}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}(t, \vec{x}) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\varepsilon \vec{E}(t, \vec{x}) + (\chi + i\alpha) \vec{H}(t, \vec{x}) \right], \end{cases} \quad (2)$$

после исключения одной из напряженностей, в уравнение второго порядка

$$\left(\vec{\nabla}^2 - (\chi + i\alpha) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\vec{\nabla}^2 + (\chi - i\alpha) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \vec{E}(t, \vec{x}) = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(t, \vec{x}), \quad (3)$$

и такое же уравнение для $\vec{H}$. Оно отличается от стандартного волнового уравнения [2] наличием в левой части слагаемого $-2i\alpha \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla}^\times \vec{E}(t, \vec{x})$, содержащего оператор $\vec{\nabla}^\times$, «перепутывающий» компоненты поля $\vec{E}(t, \vec{x})$.

В случае монохроматической зависимости всех полей от времени вида $e^{-i\omega t}$ производные по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ можно заменить на множители $-i\omega$, так что для поля $\vec{E}(\vec{x})$ ($\vec{E}(t, \vec{x}) = e^{-i\omega t} \vec{E}(\vec{x})$) имеем

$$\left(\vec{\nabla}^\times + (\chi + i\alpha) \frac{i\omega}{c} \right) \left(\vec{\nabla}^\times - (\chi - i\alpha) \frac{i\omega}{c} \right) \vec{E}(\vec{x}) = \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \omega^2 \vec{E}(\vec{x}). \quad (4)$$

Уравнение (4) также содержит «перепутывающий» компоненты оператор первого порядка $2i\alpha \frac{i\omega}{c} \vec{\nabla}^\times$.

Для решения этого дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами можно применить преобразование Фурье

$$\vec{E}(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{x}} \vec{E}(\vec{k}) d\vec{k}; \quad \vec{E}(\vec{k}) = \int e^{-i\vec{k}\vec{x}} \vec{E}(\vec{x}) d\vec{x}, \quad (5)$$

при этом для Фурье образа $\vec{E}(\vec{k})$ получаем алгебраическое уравнение

$$\left(i\vec{k}^\times + (\chi + i\alpha) \frac{i\omega}{c} \right) \left(i\vec{k}^\times - (\chi - i\alpha) \frac{i\omega}{c} \right) \vec{E}(\vec{k}) = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}(\vec{k}). \quad (6)$$

В общем случае поле $\vec{E}(\vec{k})$ может быть разложено на продольную и поперечную по отношению к вектору $\vec{k}$ составляющие:

$$\vec{E}(\vec{k}) = \vec{E}_\parallel(\vec{k}) + \vec{E}_\perp(\vec{k}); \quad \vec{E}_\parallel(\vec{k}) = \vec{k} \circ \vec{k} \frac{1}{k^2} \vec{E}(\vec{k}); \quad \vec{E}_\perp(\vec{k}) = i\vec{k}^\times i\vec{k}^\times \frac{1}{k^2} \vec{E}(\vec{k}) \quad (7)$$

В случае полей без источников из уравнений Максвелла и материальных уравнений имеем $\vec{\nabla} \vec{E}(t, \vec{x}) = 0$, что приводит к $\vec{k} \vec{E}(\vec{k}) = \vec{k} \vec{E}_\parallel(\vec{k}) = 0$, следовательно поле $\vec{E}(\vec{k})$ является поперечным:

$$\vec{E}(\vec{k}) = \vec{E}_\perp(\vec{k}) = i\vec{k}^\times i\vec{k}^\times \frac{1}{k^2} \vec{E}(\vec{k}). \quad (8)$$

Поперечное поле $\vec{E}_\perp(\vec{k})$ может быть разложено на два слагаемых ($\vec{n} = \vec{k}/k$ — единичный вектор в направлении $\vec{k}$) следующим образом:

$$\vec{E}_\perp(\vec{k}) = \frac{1}{2} (1 + i\vec{n}^\times) \vec{E}_\perp(\vec{k}) + \frac{1}{2} (1 - i\vec{n}^\times) \vec{E}_\perp(\vec{k}) = \vec{E}_\perp^+(\vec{k}) + \vec{E}_\perp^-(\vec{k}). \quad (9)$$

Поля $\vec{E}_\perp^\pm(\vec{k}) = \frac{1}{2}(1 \pm i\vec{n}^\times) \vec{E}_\perp(\vec{k})$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} i\vec{n}^\times \vec{E}_\perp^+(\vec{k}) &= i\vec{n}^\times \frac{1}{2}(1 + i\vec{n}^\times) \vec{E}_\perp(\vec{k}) = \vec{E}_\perp^+(\vec{k}); \\ i\vec{n}^\times \vec{E}_\perp^-(\vec{k}) &= i\vec{n}^\times \frac{1}{2}(1 - i\vec{n}^\times) \vec{E}_\perp(\vec{k}) = -\vec{E}_\perp^-(\vec{k}). \end{aligned} \quad (10)$$

Значит, векторы $\vec{E}_\perp^\pm(\vec{k})$ удовлетворяют свойствам (надо брать либо верхние, либо нижние знаки):

$$\frac{1}{2}(1 \pm i\vec{n}^\times) \vec{E}_\perp^\pm(\vec{k}) = \vec{E}_\perp^\pm(\vec{k}); \quad \frac{1}{2}(1 \pm i\vec{n}^\times) \vec{E}_\perp^\mp(\vec{k}) = 0. \quad (11)$$

Эти свойства означают, что слагаемые $\vec{E}_\perp^\pm(\vec{k})$ определяются однозначно. Поэтому поле $\vec{E}(\vec{x})$ однозначно представляется в виде суммы

$$\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}^+(\vec{x}) + \vec{E}^-(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{x}} \vec{E}_\perp^+(\vec{k}) d\vec{k} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{x}} \vec{E}_\perp^-(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (12)$$

Подставляя разложение (9) в уравнение (6), имеем равенство

$$\left(i\vec{k}^\times + (\chi + i\alpha) \frac{i\omega}{c} \right) \left(i\vec{k}^\times - (\chi - i\alpha) \frac{i\omega}{c} \right) [\vec{E}_\perp^+(\vec{k}) + \vec{E}_\perp^-(\vec{k})] = \varepsilon\mu \frac{\omega^2}{c^2} [\vec{E}_\perp^+(\vec{k}) + \vec{E}_\perp^-(\vec{k})], \quad (13)$$

из которого с помощью свойств (11) получаем отдельные уравнения для $\vec{E}_\perp^\pm(\vec{k})$:

$$\left[\left(k \mp \alpha \frac{i\omega}{c} \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon\mu - \chi^2) \right] \vec{E}_\perp^\pm(\vec{k}) = 0. \quad (14)$$

Решение этих уравнений можно представить в виде

$$\vec{E}_\perp^\pm(\vec{k}) = \delta(k - k_\pm(\omega)) \vec{E}^\pm(\vec{k}); \quad k_\pm(\omega) = \frac{\omega}{c} \left(\sqrt{\varepsilon\mu - \chi^2} \pm \alpha \right), \quad (15)$$

а множители $\vec{E}^\pm(\vec{k})$ зависят, фактически, только от направлений вектора $\vec{k}$. Как следствие, поля $\vec{E}^\pm(\vec{x})$ представляются интегралами Фурье

$$\vec{E}^\pm(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\vec{x}} \delta(k - k_\pm(\omega)) \vec{E}^\pm(\vec{k}) d\vec{k}. \quad (16)$$

Главным свойством этих полей является следующее:

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{E}^\pm(\vec{x}) = \pm k_\pm(\omega) \vec{E}^\pm(\vec{x})}. \quad (17)$$

Таким образом, становится ясно, что вместо сложных уравнений второго порядка (3) и (4) для определения пространственной зависимости поля $\vec{E}(\vec{x})$ можно пользоваться значительно более простыми уравнениями первого порядка (17).

Покажем это на примере определения пространственной зависимости полей $\vec{E}^\pm(\vec{x})$ в цилиндрических координатах.

Ротор векторного поля в цилиндрических координатах определяется так [3]:

$$\text{rot } \vec{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \vec{e}^\rho & \frac{\partial}{\partial \rho} & E_\rho \\ \rho \vec{e}^\varphi & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \rho E_\varphi \\ \vec{e}^z & \frac{\partial}{\partial z} & E_z \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Поэтому уравнения (17) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} & \vec{e}^\rho \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} E_z - \frac{\partial}{\partial z} \rho E_\varphi \right) + \rho \vec{e}^\varphi \left(\frac{\partial}{\partial z} E_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} E_z \right) + \vec{e}^z \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \rho E_\varphi - \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\rho \right) = \\ & = \pm k_\pm \rho \left(\vec{e}^\rho E_\rho^\pm + \vec{e}^\varphi E_\varphi^\pm + \vec{e}^z E_z^\pm \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Следовательно, для компонент $\vec{E}_{\rho,\varphi,z}^\pm$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z^\pm - \frac{\partial}{\partial z} E_\varphi^\pm = \pm k_\pm E_\rho^\pm; \\ \frac{\partial}{\partial z} E_\rho^\pm - \frac{\partial}{\partial \rho} E_z^\pm = \pm k_\pm E_\varphi^\pm; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho E_\varphi^\pm - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\rho^\pm = \pm k_\pm E_z^\pm. \end{cases} \quad (20)$$

В этой работе рассмотрим только тот частный случай, когда поле $\vec{E}(\vec{x})$ не зависит от координаты z . В этом случае система (20) заметно упрощается:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_z^+ = k_+ E_\rho^+; \\ -\frac{\partial}{\partial \rho} E_z^+ = k_+ E_\varphi^+; \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \rho E_\varphi^+ - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \varphi} E_\rho^+ = k_+ E_z^+. \end{cases} \quad (21)$$

После учёта первых двух из этих равенств, из третьего получаем для компонент $E_z^\pm(\rho, \varphi)$ уравнения

$$\left[\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \rho \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_\pm^2 \right] E_z^\pm(\rho, \varphi) = 0. \quad (22)$$

Это – двумерное уравнение Гельмгольца. Решая его стандартным методом разделения переменных, получаем

$$E_z^\pm(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_m^\pm J_m(k_\pm \rho) + B_m^\pm N_m(k_\pm \rho)] e^{im\varphi}, \quad (23)$$

где $J_m(k\rho)$ и $N_m(k\rho)$ – функции Бесселя и Неймана целых индексов. Теперь, с использованием (21), нетрудно найти компоненты $E_\rho^\pm$ и $E_\varphi^\pm$.

Заключение. Волновые уравнения электродинамики биизотропных сред содержат дополнительные, по сравнению с уравнениями для изотропных сред, слагаемые, «перепутывающие» компоненты искомых полей. В работе показано, что решения этих уравнений в монохроматическом случае обладают замечательным свойством: ротор искомого поля пропорционален самому полю. Такое свойство радикально упрощает процедуру нахождения зависимости компонент полей от криволинейных координат. Это, безусловно, очень важно для решения задач теории рассеяния электродинамики биизотропных сред.

Литература

1. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media / I. V. Lindell [et al.]. – Boston and London : Artech House, 1994. – 500 p.
2. Jackson, J. D. Classical Electrodynamics / J. D. Jackson. – 3rd ed. – New York : John Wiley & Sons, 1999. – 833 p.
3. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 432 с.

В. Н. Капшай, А. А. Шамына

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь

ГЕНЕРАЦИЯ СУММАРНОЙ ЧАСТОТЫ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ВЫТЯНУТОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ МАЛОГО РАЗМЕРА. НЕКИРАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

Введение. Нелинейная оптическая генерация в последние десятилетия является одним из наиболее перспективных методов исследования в медицине и биологии [1]. Наиболее полно для этих целей изучены возможности применения генерации второй гармоники, как частного случая нелинейной явления второго порядка. Однако благодаря возможности варьирования большего количества параметров явление генерации суммарной частоты привлекает интерес авторов [2–5]. Среди доступных для контроля параметров можно указать эллиптичности падающих волн и их поляризации, а также направления распространения возбуждающего излучения. В данной работе рассмотрена генерация суммарной частоты в поверхностном слое вытянутой сфероидальной диэлектрической частицы малого размера для случая, когда слой не обладает киральными свойствами. Изучение таких частиц актуально в силу того, что изготовление идеально сферических частиц является технически сложной задачей, особенно когда частицы имеют малый размер. Более того, биологические объекты, доступные для изучения с помощью нелинейной генерации, зачастую имеют форму, отличную от сферической.

Постановка задачи. Пусть диэлектрическая сфероидальная частица расположена таким образом, чтобы её ось симметрии совпадала с осью Oz декартовой системы