

Это – двумерное уравнение Гельмгольца. Решая его стандартным методом разделения переменных, получаем

$$E_z^\pm(\rho, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} [A_m^\pm J_m(k_\pm \rho) + B_m^\pm N_m(k_\pm \rho)] e^{im\varphi}, \quad (23)$$

где  $J_m(k\rho)$  и  $N_m(k\rho)$  – функции Бесселя и Неймана целых индексов. Теперь, с использованием (21), нетрудно найти компоненты  $E_\rho^\pm$  и  $E_\varphi^\pm$ .

**Заключение.** Волновые уравнения электродинамики биизотропных сред содержат дополнительные, по сравнению с уравнениями для изотропных сред, слагаемые, «перепутывающие» компоненты искомого поля. В работе показано, что решения этих уравнений в монохроматическом случае обладают замечательным свойством: ротор искомого поля пропорционален самому полю. Такое свойство радикально упрощает процедуру нахождения зависимости компонент поля от криволинейных координат. Это, безусловно, очень важно для решения задач теории рассеяния электродинамики биизотропных сред.

### Литература

1. Electromagnetic waves in chiral and bi-isotropic media / I. V. Lindell [et al.]. – Boston and London : Artech House, 1994. – 500 p.
2. Jackson, J. D. Classical Electrodynamics / J. D. Jackson. – 3rd ed. – New York : John Wiley & Sons, 1999. – 833 p.
3. Варшалович, Д. А. Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Л.: Наука, 1975. – 432 с.

**В. Н. Капшай, А. А. Шамына**

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,  
г. Гомель, Республика Беларусь

### ГЕНЕРАЦИЯ СУММАРНОЙ ЧАСТОТЫ В ПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ВЫТЯНУТОЙ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ МАЛОГО РАЗМЕРА. НЕКИРАЛЬНЫЙ СЛУЧАЙ

**Введение.** Нелинейная оптическая генерация в последние десятилетия является одним из наиболее перспективных методов исследования в медицине и биологии [1]. Наиболее полно для этих целей изучены возможности применения генерации второй гармоники, как частного случая нелинейной явления второго порядка. Однако благодаря возможности варьирования большего количества параметров явление генерации суммарной частоты привлекает интерес авторов [2–5]. Среди доступных для контроля параметров можно указать эллиптичности падающих волн и их поляризации, а также направления распространения возбуждающего излучения. В данной работе рассмотрена генерация суммарной частоты в поверхностном слое вытянутой сфероидальной диэлектрической частицы малого размера для случая, когда слой не обладает киральными свойствами. Изучение таких частиц актуально в силу того, что изготовление идеально сферических частиц является технически сложной задачей, особенно когда частицы имеют малый размер. Более того, биологические объекты, доступные для изучения с помощью нелинейной генерации, зачастую имеют форму, отличную от сферической.

**Постановка задачи.** Пусть диэлектрическая сфероидальная частица расположена таким образом, чтобы её ось симметрии совпадала с осью  $Oz$  декартовой системы

координат, а геометрический центр частицы совпадал с началом координат. Линейные размеры частицы зададим символами  $a_z$  (длина полуоси частицы вдоль оси  $Oz$ ) и  $a_x$  (длина полуоси частицы перпендикулярно оси  $Oz$ ). Схема задачи изображена на рисунке 1.

Генерация второй гармоники в рассматриваемой задаче происходит в тонком оптически нелинейном поверхностном слое диэлектрической частицы. Толщину слоя обозначим  $d_0$  ( $d_0 \ll a_x, d_0 \ll a_z$ ). Математически генерацию излучения можно описать с помощью вектора  $\mathbf{P}^{(2)}$  – нелинейной части вектора поляризации. Компоненты вектора  $\mathbf{P}^{(2)}$  можно найти по следующей формуле (подразумевается правило суммирования по повторяющимся индексам):

$$P_i^{(2)} = \chi_{ijk}^{(2)} E_j^{(1)} E_k^{(2)}, \quad (1)$$

где  $E_j^{(1)}, E_k^{(2)}$  – компоненты векторов напряжённости электрического поля первой и второй волны соответственно;

$\chi_{ijk}^{(2)}$  – тензор нелинейной диэлектрической восприимчивости второго порядка, являющийся тензором третьего ранга. Для некирального поверхностного слоя его можно описать выражением

$$\chi_{ijk}^{(2)} = \chi_1^{(2)} n_i n_j n_k + \chi_2^{(2)} n_i \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} n_j \delta_{ki} + \chi_4^{(2)} n_k \delta_{ij}, \quad (2)$$

где  $\chi_{1-4}^{(2)}$  – независимые компоненты тензора нелинейной диэлектрической восприимчивости;

$n_i, n_j, n_k$  – компоненты единичного вектора нормали к поверхности;

$\delta_{jk}, \delta_{jk}, \delta_{ij}$  – дельта-символы Кронекера. Здесь и далее нижние индексы  $i, j, k$  могут принимать значения  $x, y$  или  $z$ .

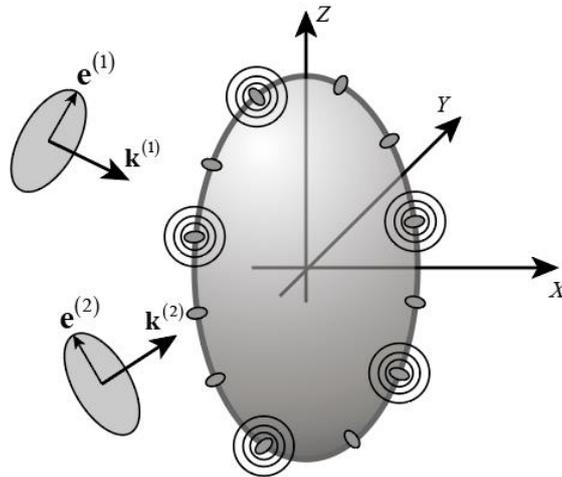


Рисунок 1 – Схема задачи о генерации суммарной частоты в поверхностном слое диэлектрической частицы

Требуется найти распределение поля суммарной частоты в дальней зоне, генерируемого поверхностным слоем сфероидальной частицы.

**Решение.** Зададим выражения для векторов электрической напряжённости возбуждающего излучения в точке, характеризуемой радиус-вектором  $\mathbf{x}$ , в следующем виде:

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{x}) = E_1 \mathbf{e}^{(1)} \exp(i\mathbf{k}^{(1)}\mathbf{x} - i\omega_1 t), \quad (3)$$

$$\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{x}) = E_2 \mathbf{e}^{(2)} \exp(i\mathbf{k}^{(2)}\mathbf{x} - i\omega_2 t),$$

где комплексные амплитуды первой и второй электромагнитной волны заданы величинами  $E_1$  и  $E_2$  соответственно, а векторы поляризации  $\mathbf{e}^{(1)}$  и  $\mathbf{e}^{(2)}$  характеризуют эллиптичность и ориентацию эллипса поляризации соответствующих волн. Временная зависимость вида  $\exp(-i\omega t)$  в дальнейшем будет опускаться.

Напряжённость электрического поля излучения суммарной частоты является результатом интерференции электромагнитных волн, генерируемых в каждом элементарном участке поверхностного слоя частицы, и может быть найдена посредством интегрирования, как в работах [3, 4, 6]:

$$E_i^{(12)}(\mathbf{x}) = \mu_{12} \frac{(\omega_{12})^2}{c^2} \frac{\exp(ik_{12}r)}{r} d_0 (\delta_{im} - e_{r,i}e_{r,m}) \times e_j^{(1)} e_k^{(2)} \int_S \exp(i\mathbf{x}'\mathbf{q}(\mathbf{x})) \chi_{mjk}^{(2)}(\mathbf{x}') dS_{\mathbf{x}'}, \quad (4)$$

где интегрирование производится по поверхности  $S$  сферической частицы, величины  $\omega_{12}$  и  $k_{12}$  – циклическая частота и модуль волнового вектора генерируемых волн соответственно;

$r$  – расстояние от центра частицы до точки наблюдения;

$\mathbf{x}'$  – радиус-вектор элементарного участка поверхности сфероида;

$\mathbf{q}(\mathbf{x})$  – вектор рассеяния, вычисляемый по формуле

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{k}^{(1)} + \mathbf{k}^{(2)} - \mathbf{k}^{(12)}. \quad (5)$$

Выполняя замену в (4), получим выражение для компонент вектора напряжённости электрического поля суммарной частоты:

$$E_i^{(12)}(\mathbf{x}) = \mu_{12} \frac{(\omega_{12})^2}{c^2} \frac{\exp(ik_{12}r)}{r} d_0 a_x^2 (\delta_{im} - e_{r,i}e_{r,m}) e_j^{(1)} e_k^{(2)} X_{mjk}^{(12)}(\mathbf{x}), \quad (6)$$

где  $X_{mjk}^{(12)}(\mathbf{x})$  – тензор эффективной восприимчивости, выражение для которого может быть записано в следующем виде:

$$X_{mjk}^{(2\omega)}(\mathbf{x}) = \chi_1^{(2)} I(n_m n_j n_k | \mathbf{x}) + \chi_2^{(2)} I(n_m | \mathbf{x}) \delta_{jk} + \chi_3^{(2)} I(n_j | \mathbf{x}) \delta_{km} + \chi_4^{(2)} I(n_k | \mathbf{x}) \delta_{mj}. \quad (7)$$

Здесь значения функции  $I(n_m | \mathbf{x})$  и  $I(n_m n_j n_k | \mathbf{x})$  могут быть вычислены посредством интегрирования:

$$I(n_m | \mathbf{x}) = \frac{1}{a_x^2} \int_S \exp(i\mathbf{x}'\mathbf{q}(\mathbf{x})) n_m(\mathbf{x}') dS_{\mathbf{x}'}, \quad (8)$$

$$I(n_m n_j n_k | \mathbf{x}) = \frac{1}{a_x^2} \int_S \exp(i\mathbf{x}'\mathbf{q}(\mathbf{x})) n_m(\mathbf{x}') n_j(\mathbf{x}') n_k(\mathbf{x}') dS_{\mathbf{x}'}$$

Явный вид интегралов в (8) может быть представлен следующим образом:

$$I(n_x) = \rho M_{0,1,0}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) v_x, \quad (9)$$

$$I(n_y) = \rho M_{0,1,0}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) v_y, \quad I(n_z) = M_{0,0,1}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho),$$

$$I(n_z n_x n_x) = \rho M_{0,1,2}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) v_x,$$

$$I(n_z n_z n_y) = \rho M_{0,1,2}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) v_y, \quad I(n_z n_z n_z) = M_{0,0,3}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho),$$

$$I(n_z n_x n_x) = \rho^2 [M_{0,2,1}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) v_x v_x + M_{2,0,1}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) (1 - v_x v_x)],$$

$$I(n_z n_x n_y) = \rho^2 (M_{0,2,1}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) - M_{2,0,1}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho)) v_x v_y, \quad (10)$$

$$I(n_z n_y n_y) = \rho^2 [M_{0,2,1}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) v_y v_y + M_{2,0,1}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) (1 - v_y v_y)],$$

$$I(n_x n_x n_x) = \rho^3 v_x [M_{0,3,0}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) v_x v_x + 3M_{2,1,0}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) (1 - v_x v_x)],$$

$$I(n_x n_x n_y) = \rho^3 v_y [M_{0,3,0}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) v_x v_x + M_{2,1,0}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) (1 - 3v_x v_x)],$$

$$I(n_x n_y n_y) = \rho^3 v_x [M_{0,3,0}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) v_y v_y + M_{2,1,0}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) (1 - 3v_y v_y)],$$

$$I(n_y n_y n_y) = \rho^3 v_y [M_{0,3,0}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) v_y v_y + 3M_{2,1,0}(q_{\perp} a_x, q_z a_z, \rho) (1 - v_y v_y)].$$

где  $\rho = a_z / a_x$ ;

$q_{\perp}$  – составляющая вектора рассеяния, перпендикулярная оси частицы;

$v_x, v_y$  – компоненты единичного вектора вдоль  $q_{\perp}$ . Здесь для записи выражений используется вспомогательная функция  $M$ , которая для вытянутого эллипсоида имеет следующий вид:

$$M_{s,\epsilon,q}(z_1, z_2, \rho) = \int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{2\pi} d\varphi' \exp(iz_1 \sin \theta' \cos \varphi') \exp(iz_2 \cos \theta') \times \quad (11)$$

$$\times \sin^{s+\epsilon+1} \theta' \cos^q \theta' \sin^s \varphi' \cos^{\epsilon} \varphi' (\rho^2 \sin^2 \theta' + \cos^2 \theta')^{-(s+\epsilon+q-1)/2}.$$

Она может быть вычислена посредством разложения в ряд.

**Заключение.** В полученном аналитическом решении задачи о генерации суммарной частоты в поверхностном слое диэлектрических частиц в форме вытянутого сфероида результирующие формулы представлены в компонентной форме с использованием бесконечных рядов. Также найдена область применимости результирующих формул, которая ранее

отсутствовала в работе [7]. Подобный подход к описанию нелинейной оптической генерации в диэлектрических частицах может найти применение также при описании генерации суммарной частоты в поверхностном слое частиц в форме сплюснутого эллипсоида вращения, а также в случае, если поверхностный слой обладает киральными свойствами.

### Литература

1. Second Harmonic Studies of Ions Crossing Liposome Membranes in Real Time / J. Liu [et al.] // *J. Phys. Chem. B.* – 2008. – Vol. 112, № 48. – P. 15263–15266.
2. Size Dependence of Second-Harmonic Generation at the Surface of Microspheres / S. Viarbitskaya [et al.] // *Phys. Rev. A.* – 2010. – Vol. 81, № 5. – P. 053850.
3. Шамына, А. А. Генерация суммарной частоты от тонкого цилиндрического слоя / А. А. Шамына, В. Н. Капшай // *Оптика и спектроскопия.* – 2018. – Т. 124, № 1. – С. 105–121.
4. Капшай, В. Н. Генерация суммарной частоты от тонкого сферического слоя. I. Аналитическое решение / В. Н. Капшай, А. А. Шамына // *Оптика и спектроскопия.* – 2018. – Т. 124, № 6. – С. 795–803.
5. Шамына, А. А. Генерация суммарной частоты от тонкого сферического слоя. II. Анализ решения / А. А. Шамына, В. Н. Капшай // *Оптика и спектроскопия.* – 2018. – Т. 125, № 1. – С. 71–78.

**А. И. Кравченко, Т. Н. Савкова**

Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого,  
г. Гомель, Республика Беларусь

### **ОЧКИ ДЛЯ ЗАЩИТЫ ЗРИТЕЛЬНЫХ ОРГАНОВ ЧЕЛОВЕКА ОТ ВОЗДЕЙСТВИЯ СИНЕ-ГОЛУБОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ИСТОЧНИКОВ СВЕТА**

**Введение.** Современные источники света и светодиодные экраны ряда электронных устройств интенсивно излучают фиолетово-сине-голубой свет (до 45 % в составе излучения). Эволюционно наши глаза не адаптированы к избытку излучения в коротковолновом видимом диапазоне и практически не имеют природной защиты от него. Сине-голубой свет препятствует выработке мелатонина-гормона, который регулирует наш сон. Таким образом, увеличение времени, проведенное перед экраном электронных устройств, и сокращение времени отдыха вносит дисбаланс в привычную жизнь, нарушая суточный режим сна и бодрствования (циркадный ритм). Больше всего от синего цвета страдают дети и пациенты с искусственным хрусталиком вследствие того, что среды их глаз наиболее прозрачны [1, 2]. Как все мы знаем, глаза ребенка проходят критический период роста и развития.

Современная медицина доказала, что сине-голубой свет между 400–520 нм наиболее вреден для глаз, легко вызывает сухость глаз, неприятные ощущения, боль, ухудшение зрения, темные круги и мешки под глазами, разрушает сетчатку глазных яблок, генерирует свободные радикалы, приводит к катаракте и другим заболеваниям глаз. Обычные солнцезащитные очки или так называемые очки ночного видения способны несколько ослабить блики, но не в состоянии нейтрализовать вред сине-голубого света, при этом затемняя все поле зрения, и долгое ношение их ещё больше усиливает усталость.

Учитывая все вышеизложенное, возникает вопрос: а есть ли очки, которые могут защитить глаза от вредного воздействия этого излучения; какими оптическими свойствами они должны обладать?