

И. В. СКРЫШНИК

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ МОРСА К НЕЛИНЕЙНЫМ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 19 VII 1971)

Идеи Морса изучения связи между характером и количеством критических точек некоторой функции и топологическими свойствами того многообразия, на котором эта функция определена, были перенесены на случай функционалов на гильбертовых многообразиях $(^1-^4)$. Палэ и Смейл рассмотрели при слабых ограничениях общие функционалы класса C^2 и указали приложения к дифференциальным уравнениям. В работах Я. Б. Лопатинского и И. И. Данилюка ослабляются некоторые предположения Палэ и Смейла.

В настоящей работе теория Морса распространяется на функционалы, не принадлежащие классу C^2 . Дело в том, что интегральные функционалы принадлежат C^2 при существенных дополнительных ограничениях (см. теорему 1). Этот факт не был замечен Палэ и Смейлом, и содержащееся в $(^1, ^2)$ утверждение о принадлежности интегрального функционала классу C^2 ошибочно. Указанное обстоятельство побудило автора строить обобщенную теорию Морса при таких предположениях, которые бы обеспечили более широкие применения к нелинейным эллиптическим уравнениям.

1. Здесь указывается, что принадлежности классу C^2 функционала

$$J(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \partial u / \partial x) dx, \quad u \in \dot{W}_2^1(\Omega),$$

недостаточно естественных предположений (гладкости, ограничений на рост f). Пользуемся обозначениями $x = (x_1, \dots, x_n)$, $dx = dx_1, \dots, dx_n$, $\partial u / \partial x = (\partial u / \partial x_1, \dots, \partial u / \partial x_n)$ и предполагаем, что при $(x, u, p) \in \bar{\Omega} \times R^1 \times R^n$ функция $f(x, u, p)$ непрерывна по x , дважды непрерывно дифференцируема по u, p и с некоторой постоянной C выполнены оценки

$$\left| \frac{\partial^2 f(x, u, p)}{\partial p_i \partial p_j} \right|, \left| \frac{\partial^2 f(x, u, p)}{\partial p_i \partial u} \right|, \left| \frac{\partial^2 f(x, u, p)}{\partial u^2} \right| \leq C$$

при $1 \leq i, j \leq n$. Предполагается, что гладкость области Ω обеспечивает применение теорем вложения.

В этих предположениях имеет место

Теорема 1. Для того чтобы функционал J имел в нуле вторую производную по Фреше, необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x, 0, p) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) p_i p_j + \sum_{i=1}^n b_i(x) p_i + c(x).$$

Отметим, что в случае интегрального функционала в L_2 близкое утверждение доказал М. М. Вайнберг $(^5)$.

2. В дальнейшем M — полное гильбертово многообразие класса C^2 $(^6)$ без края, моделью которого является гильбертово пространство H . Через M_p обозначаем касательное пространство к M в точке p , и пусть $\|\cdot\|$ — некоторая норма в M_p . Рассматривается отображение $F: M \rightarrow R^1$ класса C^1 , и пусть

dF_p — дифференциал F в p , $dF_p \in M_p^*$. Точку p называем критической, если $dF_p = 0$.

Предполагается выполненным следующее условие C , введенное Палэ и Смейлом: пусть S — произвольное подмножество многообразия M , на котором функционал F ограничен и

$$\inf_{p \in S} \|dF_p\|_* = 0.$$

Тогда в замыкании S содержится критическая точка F .

Пусть p — произвольная точка M и φ — некоторая карта в p . Предполагается, что отображение $d(F\varphi^{-1})$ имеет производную Гато в точке $\varphi(p)$, которую обозначим через $F'_{\varphi(p)}$, и что

1) с некоторыми положительными постоянными C_1, C_2 (зависящими от φ)

$$\langle F'_{\varphi(p)} h, h \rangle \geq C_1 \|h\|_H^2 - C_2 \|h\|^2, \quad \|F'_{\varphi(p)}\| \leq C_2;$$

здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$, $\|\cdot\|_H$ — скалярное произведение и норма в H соответственно, $\|\cdot\|$ — некоторая компактная по сравнению с $\|\cdot\|_H$ норма;

2) для произвольного элемента $h \in H$ из сходимости p_i к p следует сходимость $F'_{\varphi(p_i)} h$ к $F'_{\varphi(p)} h$.

Критическая точка $p_0 \in M$ называется невырожденной, если отображение $F'_{\varphi(p_0)}$ — мономорфизм.

Индексом λ критической точки p называется точная верхняя грань размерностей линейных подпространств H , на которых

$$\langle F'_{\varphi(p)} h, h \rangle < 0.$$

Проверяется, что невырожденность и индекс не зависят от выбора карты.

Теорема 2. Пусть $F: M \rightarrow R^1$ — отображение класса C^1 , удовлетворяющее условию C и предположениям 1), 2).

Тогда индекс каждой критической точки конечен.

Введем теперь при $a < b$ множества $M^a = \{p \in M: F(p) \leq a\}$, $M^{a,b} = \{p \in M: a \leq F(p) \leq b\}$. Известно, что если множество $M^{a,b}$ не содержит критических точек F , то M^a — деформационный ретракт M^b .

Основной результат работы дает

Теорема 3. Пусть $F: M \rightarrow R^1$ — отображение класса C^1 , удовлетворяющее условиям C и 1), 2), и пусть $M^{a,b}$ содержит только невырожденные критические точки F , не лежащие на $F^{-1}(a)$, $F^{-1}(b)$.

Тогда в $M^{a,b}$ содержится лишь конечное число критических точек F — $p_1, \dots, p_n$ и M^b имеет гомотопический тип M^a с приклеенными клетками $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$, где λ_i — индекс критической точки p_i .

Обычным образом ⁽⁷⁾ отсюда выводятся неравенства Морса.

Теорема 4. Пусть отображение $F: M \rightarrow R^1$ удовлетворяет предположениям теоремы 3. Обозначим через $C_k^{a,b}$ число критических точек F в $M^{a,b}$ индекса k и через $R_k^{a,b}$ — k -е число Бетти пары (M^b, M^a) .

Тогда при $m < \infty$

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} R_k^{a,b} \leq \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_k^{a,b},$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k R_k^{a,b} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k C_k^{a,b}.$$

Отсюда непосредственно следует $R_k^{a,b} \leq C_k^{a,b}$. В случае ограниченного снизу функционала F и в предположении, что все критические точки F невырождены, можно доказать, что M имеет гомотопический тип клеточного

комплекса, в котором каждой критической точке F индекса k соответствует клетка размерности k . Неравенства Морса при этом можно получить в виде

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} R_k \leq \sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} C_k,$$

где C_k — число критических точек F на M индекса k , R_k — k -е число Бетти M .

3. Здесь будут указаны возможности применения предыдущих результатов к функционалам

$$I(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \dots, D^m u) dx,$$

где $D^j u = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\alpha_n} u : \alpha_1 + \dots + \alpha_n = j \right\}$, α_i целые.

Предположим, что $f(x, \xi)$ непрерывна по x и дважды непрерывно дифференцируема по ξ при $x \in \bar{\Omega}$, $\xi = \{\xi_\alpha : |\alpha| \leq m\} \in R^M$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, и что с некоторыми положительными постоянными k_1 , k_2 выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} f_{\alpha\beta}(x, \xi) \eta_\alpha \eta_\beta &\geq k_1 \sum_{|\alpha|=m} \eta_\alpha^2, \\ |f_{\alpha\beta}(x, \xi)| &\leq k_2 \quad \text{при} \quad |\alpha| = |\beta| = m, \\ |f_{\alpha\beta}(x, \xi)| &\leq k_2 \left\{ 1 + \sum_{|\gamma| \leq m} |\xi_\gamma|^{p_\gamma q_{\alpha\beta}} \right\} \quad \text{при} \quad |\alpha| + |\beta| < 2m, \end{aligned}$$

где

$$f_{\alpha\beta}(x, \xi) = \frac{\partial^2 f(x, \xi)}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}, \quad p_\alpha = \frac{2n}{n-2(m-|\alpha|)}, \quad \frac{1}{q_{\alpha\beta}} + \frac{1}{p_\alpha} + \frac{1}{p_\beta} < 1.$$

Предположим, что гладкость Ω обеспечивает применение теорем вложения. Тогда справедлива

Теорема 5. Функционал $I: \dot{W}_2^m(\Omega) \rightarrow R^1$ удовлетворяет условиям 1), 2) п. 2.

Для выполнения условия C еще достаточно потребовать полуограниченности функционала I :

$$I(u) \geq k_1 \|u\|_m^2 - k_2,$$

где $\|\cdot\|_m$ — норма в $\dot{W}_2^m(\Omega)$. Так что к функционалу I при естественных предположениях применимы результаты п. 2.

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР
Донецк

Поступило
6 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Smale, Ann. Math., 80, № 2, 382 (1964). ² R. Palais, S. Smale, Bull. Am. Math. Soc., 70, 165 (1964). ³ Я. Б. Лопатинский, Док. АН УРСР, сер. А, 6, 515 (1968). ⁴ И. И. Данилюк, Док. АН УРСР, сер. А, 1, 16 (1971). ⁵ М. М. Вайнберг, УМН, 7, в. 4, 55 (1952). ⁶ С. Ленг, Введение в теорию дифференцируемых многообразий, М., 1967. ⁷ Дж. Милнор, Теория Морса, М., 1968.