

К. С. Бабич, В. В. Андреев

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорина,
г. Гомель, Республика Беларусь

ЭЛЕМЕНТЫ ПРЕЦИЗИОННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК ДВУХЧАСТИЧНЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ

Введение. Рассмотрим двухчастичную систему, описываемую следующим общим уравнением связанного состояния:

$$H|\Phi\rangle = (T(k) + V(r))|\Phi\rangle = E|\Phi\rangle, \quad (1)$$

где $k = |\mathbf{k}|$, $r = |\mathbf{r}|$ и $|\Phi\rangle$ – волновая функция (ВФ) системы двух частиц, взаимодействие которых определяется центрально симметричным потенциалом $V(r)$. Величина E определяет энергию состояния. Оператор кинетической энергии $T(k)$ в случае полурелятивистской кинематики определяется соотношением

$$T(k) = \sqrt{k^2 + m_1^2} + \sqrt{k^2 + m_2^2}, \quad (2)$$

где $m_{1,2}$ – массы частиц, образующих систему. В нерелятивистском пределе имеем

$$T_i(k) = \frac{k^2}{2\mu} + m_1 + m_2, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3)$$

В данной работе рассмотрим возможности вариационного метода решения уравнения (1) с потенциалами вида

$$V(r) = A r^p \exp(-\eta r), \quad V(r) = A r^p \exp(-\eta r^2) \quad p \geq -2, \quad \text{Re}[\eta] \geq 0. \quad (4)$$

Потенциал (4) в частных случаях включают в себя кулоновский, линейный запирающий потенциалы, а также экранированный кулоновский потенциал, известный в физике ядра как потенциал Юкавы, и многие другие. Однако уравнение (1) для многих из перечисленных потенциалов не может быть решено точно, даже в нерелятивистском пределе. Поэтому были разработаны многочисленные численные и пертурбативные методы получения уровней энергии и связанных с ними физических величин.

При изучении различных эффектов следует выделить задачу поиска новых методов расчётов и развитие математического аппарата, который позволил бы максимально упростить вычислительные схемы и добиться результатов с высокой степенью точности. Целью данной работы является разработка элементов вычисления спектра энергии и волновых функций двухчастичной квантовой системы, которая описывается уравнением (1) с потенциалом (4) с помощью вариационного метода.

Элементы вариационного метода. Наличие центральной симметрии позволяет искать решение (1) в виде

$$\Psi_{n,\ell m}(\mathbf{r}) = (R_{n\ell}(r)/r)Y_{\ell m}(\Omega_r), \quad \Psi_{n,\ell m}(\mathbf{k}) = (\tilde{R}_{n\ell}(k)/k)Y_{\ell m}(\Omega_k), \quad (5)$$

где функция Ψ является фурье-образом функции Ψ ;

$Y_{\ell m}(\Omega)$ – сферические гармоники.

Таким образом определения волной функции Ψ необходимо найти только радиальную функцию $R_{n\ell}(r)$, которая нормирована условием

$$\int_0^{\infty} R_{n\ell}^*(r) R_{n'\ell}(r) dr = \delta_{n,n'}. \quad (6)$$

Одним из наиболее используемых методов решения уравнения (1) является вариационный метод. В вариационном подходе осуществляется разложение ВФ R с использованием пробных ВФ $\phi_k(x, \beta)$, т. е.

$$|R\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |\phi_k(\beta)\rangle, \quad (7)$$

где β – вариационный параметр (или набор параметров), а коэффициенты $a = \{a_1, a_2, \dots\}$ связаны с вероятностью нахождения системы с ВФ $\phi_{1,2,\dots}(x, \beta)$.

Пробные ВФ общем случае удовлетворяют условия нормировки и полноты

$$\int g(x, \beta) \phi_n^*(x, \beta) \phi_{n'}(x, \beta) dx = \delta_{n,n'}, \quad (8)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(x, \beta) \phi_n^*(x, \beta) \phi_n(x, \beta) dx = I, \quad (9)$$

где $g(x, \beta)$ играет роль «весовой» функции. В случае, если $g(x, \beta) = 1$, функции $\phi_k(\beta)$ образуют ортонормированный базис.

Для расчётов удобно ввести биортонормированный партнер к функции $\phi_k(\beta)$ соотношением (смотри [1, 2] на примере базиса Кулона–Штурма (CS-базис)):

$$\bar{\phi}_k(x, \beta) = g(x, \beta) \phi_k(x, \beta). \quad (10)$$

Использование (7), (8) и (9) приводит к задаче на обобщённые собственные значения

$$H(\beta) \cdot a = E_n W(\beta) \cdot a \quad (11)$$

с бесконечномерными матрицами

$$H_{ij}(\beta) = \langle \phi_i(\beta) | H | \phi_j(\beta) \rangle, \quad W_{ij}(\beta) = \langle \phi_i(\beta) | \phi_j(\beta) \rangle. \quad (12)$$

В данном случае возможен и переход к обычной задаче на собственные значения с использованием биортонормированного состояния $\bar{\phi}_j$

$$H(\beta) \cdot a = E_n a, \quad (13)$$

где

$$H_{ij}(\beta) = \langle \bar{\phi}_i(\beta) | H | \phi_j(\beta) \rangle. \quad (14)$$

Для приближённого решения уравнения бесконечномерные матрицы (12) заменяют на конечномерные вида $n \times n$. В данном подходе для поиска спектра $\tilde{E}_k(\beta)$ максимально приближённым к истинному E_k проводят процедуру вычисления вариационного параметра β при котором значения $\tilde{E}_k(\beta)$ минимальны.

Таким образом, для прецизионного вычисления характеристик двухчастичной системы, используя вариационный метод, необходимо решить следующие задачи:

- выбрать пробные ВФ, которые допускали аналитическое вычисление матричных элементов (12);
- разработать процедуру вычисления оптимального набора параметров;
- создать программное обеспечение, которое позволяет проводить промежуточные вычисления и получать итоговый результат с заданной точностью.

Решению первой задачи и посвящена наша работа. В работе представлены аналитические выражения, которые позволяют оценить матричные элементы для полного гамильтониана H с потенциалами (4).

О явном виде вариационных функций. Безусловно выбор функций тесно связан с видом потенциалов для которых решается задача по вычислению энергетического спектра двухчастичной системы. Одним из важных условий является наличие фурье-образа вариационной функции в аналитическом виде. Это позволяет произвести расчёта кинетической части T гамильтониана H в импульсном представлении.

В качестве пробных ВФ часто используют так называемый L^2 базис [3], который в может быть записан в общем виде

$$\phi_n(x) = A_n w(x) P_n(x). \quad (15)$$

Здесь A_n нормировочный множитель $P_n(x)$ полином по x степени n . Весовая функция удовлетворяет соотношением $w(x_{1,2}) = 0$, где x_1 и x_2 левая и правая границы пространства x . Выделяют два варианта для границ. Случай, когда оба предела являются конечными и

$$w(x) = (x - x_1)^\gamma (x - x_2)^\tau, \quad P_n(x) = {}_2F_1(-n, b; c; x). \quad (16)$$

В втором варианте один конечный (x_1), а другой параметр $x_2 = \infty$. Тогда

$$w(x) = (x - x_1)^\gamma e^{-\tau(x-x_1)}, \quad P_n(x) = {}_1F_1(-n, c, x). \quad (17)$$

В уравнениях (16) и (17) функция ${}_2F_1(a, b; c; x)$ – гипергеометрическая функция, а ${}_1F_1(a, b; x)$ – конфлюэнтная гипергеометрическая функция. Параметры γ , τ , b и c действительны, а параметры α и τ положительны.

Для потенциала (4) в координатном пространстве удобно выбрать $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$. В этом случае имеем, что

$$\phi_{n,\alpha}^\gamma(x) = A_{n,\alpha} x^\gamma e^{-\tau x} L_n^\alpha(x), \quad (18)$$

где $A_{n,\alpha} = \sqrt{\Gamma(n+1)/\Gamma(n+\alpha+1)}$, $\alpha > -1$ и $n = 0, 1, 2, \dots$. Требование ортогональности вида (8) для полиномов Лагерра $L_n^\alpha(x)$ приводит к $\tau = 1/2$. В итоге имеем

$$\phi_{n,\alpha}^{\gamma}(x) = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}} x^{\gamma} e^{-x/2} L_n^{\alpha}(x). \quad (19)$$

Базис (19) включает целый класс вариационных функций $\Phi(r, \xi)$, зависящих от радиальной координаты r в трёхмерном пространстве

$$\Phi_{n\ell}(r, \xi) = N_{\xi} \phi_{n,\alpha_{\ell}}^{\gamma_{\ell}}(x(r, \xi)). \quad (20)$$

В таблице 1 представлены часто используемые при вычислениях базисы $\Phi_{n\ell}(r, \xi)$. Отметим, что псевдокулоновские $\Phi_{n\ell}^{\text{PC}}(r, \xi)$ и осцилляторные $\Phi_{n\ell}^{\text{OS}}(r, \xi)$ ВФ образуют ортонормированный базис, а функции Кулона–Штурма $\Phi_{n\ell}^{\text{CS}}(r, \xi)$ ортогональны с весом $g(r, \xi) = 1/r$. Важно отметить, что для каждой из функций из таблицы 1 существуют фурье-образы функций $\Phi_{n\ell}(p, \xi)$.

Таблица 1 – Базисы функций, определяемые уравнением (20)

N_{ξ}	x	γ_{ℓ}	α_{ℓ}
$\Phi_{n\ell}^{\text{PC}}(r, \xi) = (2\xi)^{1/2} \sqrt{n!/(n+2\ell+2)!} (2\xi r)^{\ell+1} e^{-\xi r} L_n^{2\ell+2}(2\xi r)$			
$\sqrt{2\xi}$	$2\xi r$	$\ell+1$	$\ell+2$
$\Phi_{n\ell}^{\text{CS}}(r, \xi) = \sqrt{n!/(n+2\ell+1)!} (2\xi r)^{\ell+1} e^{-\xi r} L_n^{2\ell+1}(2\xi r)$			
1	$2\xi r$		$2\ell+1$
$\Phi_{n\ell}^{\text{OS}}(r, \xi) = (2\xi)^{1/2} \sqrt{n!/\Gamma(n+\ell+3/2)} (\xi r)^{\ell+1} e^{-\xi^2 r^2/2} L_n^{\ell+1/2}(\xi^2 r^2)$			
$\sqrt{2\xi}$	$(\xi r)^2$	$(\ell+1)/2$	$\ell+1/2$

Аналитическое вычисление интегралов. Для получения аналитических выражений для матричных элементов (12) с потенциалом (4) получим интегралы с билинейной комбинацией функций (19).

Рассмотрим вычисление интегралов вида

$$V_{n_1, n_2}^{\beta_{n_1}, \beta_{n_2}} = \int_0^{\infty} \Phi_{n_1\ell}^*(r, \beta_{n_1}) V(r) \Phi_{n_2\ell}(r, \beta_{n_2}) r^2 dr, \ell+1 \quad (21)$$

$$T_{n_1, n_2}^{\beta_{n_1}, \beta_{n_2}} = \int_0^{\infty} \Phi_{n_1\ell}^*(k, \beta_{n_1}) T(k) \Phi_{n_2\ell}(k, \beta_{n_2}) k^2 dk, \quad (22)$$

которые можно использовать при решении уравнений движения двухчастичных квантовых систем вариационным методом и для общепринятого варианта $\beta_{n_1} = \beta_{n_2} = \beta$.

Вычисления в координатном пространстве для (21) для всех функций из таблицы 1, и для осцилляторных функций в импульсном пространстве основаны на преобразовании произведения двух полиномов Лагерра

$$L_{n_1}^{\alpha_1}(\beta_1 x) L_{n_2}^{\alpha_2}(\beta_2 x) \quad (23)$$

с помощью известной формулы умножения многочленов Лагерра в виде [4, с. 261]

$$L_n^\alpha(xy) = \sum_{k=0}^n \binom{n+\alpha}{n-k} y^k L_k^\beta(x) {}_2F_1(k-n, k+\beta+1; k+\alpha+1; y), \quad (24)$$

формулы Чу–Вандермонде(Chu–Vandermonde) (см. [5])

$$L_n^\alpha(z) = \sum_{j=0}^n \frac{(\alpha-\gamma)_{n-j}}{(n-j)!} L_j^\gamma(z), \quad (25)$$

и разложения

$$L_n^\alpha(x) = \sum_{r=0}^n \binom{n+\alpha}{n-r} \frac{(-x)^r}{r!}. \quad (26)$$

С помощью (26) для произведения (23) получим новую формулу

$$L_{n_1}^{\alpha_1}(\beta_1 x) L_{n_2}^{\alpha_2}(\beta_2 x) = \sum_{j=0}^{n_1+n_2} V \left\{ \begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \beta_1 \\ n_1, & n_2, & \beta_2 \end{matrix} \middle| j \right\} x^j, \quad (27)$$

где

$$V \left\{ \begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \beta_1 \\ n_1, n_2, \beta_2 \end{matrix} \middle| j \right\} = \begin{cases} \frac{(-1)^j}{j!} \beta_2^j \binom{n_1+\alpha_1}{n_1} \binom{n_2+\alpha_2}{n_2-j} \times \\ \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -j, -n_1, -j-\alpha_2; \\ -j+n_2+1, \alpha_1+1; -\frac{\beta_1}{\beta_2} \end{matrix} \right) & , \quad 0 \leq j \leq n_2 \\ \left(\frac{\beta_2}{\beta_1} \right)^{n_2} \frac{(-1)^j}{n_2!(j-n_2)!} \beta_1^j \binom{n_1+\alpha_1}{n_1+n_2-j} \times \\ \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} j-n_1-n_2, -n_2, -\alpha_2-n_2; \\ j-n_2+1, \alpha_1+j-n_2+1; -\frac{\beta_1}{\beta_2} \end{matrix} \right) & , \quad j \geq n_2+1 \end{cases} \quad V(r) = r^p e^{-\eta r}. \quad (28)$$

Вычисление интегралов с $V(r) = r^p e^{-\eta r}$. Для псевдокулоновских ВФ и функций Кулона–Штурма интеграл (21) с трансформируется к виду

$$V_{n_1, n_2}^{\beta_1, \beta_2} \sim \int_0^\infty x^\gamma e^{-\sigma x} L_{n_1}^{\alpha_1}(\beta_1 x) L_{n_2}^{\alpha_2}(\beta_2 x) dx, \quad \Re(\gamma) > -1; \quad \Re(\sigma) > 0; \quad n_1, n_2 \in \mathbb{N}_0, \quad (29)$$

где введены параметры γ и σ , зависящие от $\beta_i = \beta_{n_i}$, α_i , η и p .

Интеграл (29) можно получить как частный случай общего (классического) результата [6] с использованием гипергеометрических функций двух переменных. В многих системах численных расчётов такие функции отсутствуют, как встроенные. Поэтому возникает задача преобразования формулы (29) к выражению с функциями, которые имеются в этих системах. Поэтому используя (24) получим, что [7]:

$$\int_0^\infty x^\gamma e^{-\sigma x} L_{n_1}^{\alpha_1}(\beta_1 x) L_{n_2}^{\alpha_2}(\beta_2 x) dx = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\sigma^{\gamma+1}} \sum_{k=0}^{\min(n_1, n_2)} \binom{k+\gamma}{k} \binom{n_1+\alpha_1}{n_1-k} \binom{n_2+\alpha_2}{n_2-k} \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\sigma^2}\right)^k \times$$

$$\times {}_2F_1\left(k-n_1, k+\gamma+1; k+\alpha_1+1; \frac{\beta_1}{\sigma}\right) {}_2F_1\left(k-n_2, k+\gamma+1; k+\alpha_2+1; \frac{\beta_2}{\sigma}\right). \quad (30)$$

Однако для осцилляторных ВФ вычисление (21) с $V(r) = r^p e^{-\eta r}$ не сводится к интегралу (29) и поэтому в данном случае используем полученное соотношение (27):

$$V_{n_1, n_2}^{\beta_1, \beta_2} = \int_0^\infty \Phi_{n_1 \ell}^{*OS}(r, \beta_1) r^p e^{-\eta r} \Phi_{n_2 \ell}^{OS}(r, \beta_2) dr = \frac{\sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!}}{\sqrt{\Gamma\left(\ell+n_1+\frac{3}{2}\right)} \sqrt{\Gamma\left(\ell+n_2+\frac{3}{2}\right)}} \times$$

$$\times (\beta_1 \beta_2)^{\ell+\frac{3}{2}} (\beta_1^2 + \beta_2^2)^{\frac{1}{2}(-p-2\ell-3)} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{(-1)^j}{j!} \beta_2^j \binom{n_1+\alpha_1}{n_1} \binom{n_2+\alpha_2}{n_2-j} \times$$

$$\times R\left(\gamma_j, \frac{1}{2}, \frac{\eta}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}\right) {}_3F_2\left(-j, -n_1, -j-\alpha_2; -j+n_2+1, \alpha_1+1; -\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{n_2} \sum_{j=n_2+1}^{n_1+n_2} \frac{(-1)^j}{n_2!(j-n_2)!} \beta_1^j \binom{n_1+\alpha_1}{-j+n_1+n_2} R\left(\gamma_j, \frac{1}{2}, \frac{\eta}{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}\right) \times$$

$$\times {}_3F_2\left(j-n_1-n_2, -n_2, -\alpha_2-n_2; j-n_2+1, \alpha_1+j-n_2+1; -\frac{\beta_1}{\beta_2}\right), \quad (31)$$

где $\gamma_j = 2+2j+2\ell+p$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/2 + \ell$ и

$$R(\gamma, \sigma, \tilde{\eta}) = \frac{1}{\sigma^{\frac{\gamma}{2}+1}} \left(\sqrt{\sigma} \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) {}_1F_1\left(\frac{\gamma+1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{\tilde{\eta}^2}{4\sigma}\right) - \tilde{\eta} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1\right) {}_1F_1\left(\frac{\gamma}{2}+1; \frac{3}{2}; \frac{\tilde{\eta}^2}{4\sigma}\right) \right) -$$

$$- \tilde{\eta} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+1\right) {}_1F_1\left(\frac{\gamma}{2}+1; \frac{3}{2}; \frac{\tilde{\eta}^2}{4\sigma}\right), \quad (32)$$

Вычисление интегралов с $T(k)$. Получение матричных элементов для оператора $T(k) \sim k^2/(2\mu)$ в нерелятивистском случае для всех ВФ таблицы 1 сводится к выше приведённым вычислениям. Так для ВФ Кулона-Штурма ($\beta_1 = \beta_2 = \beta$) с помощью (25) не-сложно найти, что

$$T_{n_1 n_2, \ell}^{NR, CS}(\beta) = \frac{\beta^2}{4\mu} \left(\delta_{n_1, n_2-1} \sqrt{n_2} \sqrt{2\ell+n_2+1} + 2(\ell+n_1+1) \delta_{n_1, n_2} + \delta_{n_1, n_2+1} \sqrt{n_1} \sqrt{2\ell+n_1+1} \right). \quad (33)$$

Для осцилляторных ВФ в импульсном представлении получим, что

$$\begin{aligned}
T_{n_1 n_2, \ell}^{NR, OS}(\beta_1, \beta_2) &= \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2\mu} \frac{(-1)^{n_1+n_2} 2^{\ell+\frac{5}{2}} \sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!} \Gamma\left(\ell + \frac{5}{2}\right)}{\sqrt{\Gamma\left(\ell + n_1 + \frac{3}{2}\right)} \sqrt{\Gamma\left(\ell + n_2 + \frac{3}{2}\right)}} \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}\right)^{\ell+\frac{7}{2}} \times \\
&\times \sum_{k=0}^{\min(n_1, n_2)} \left(\frac{2\beta_1 \beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}\right)^{2k} \binom{k + \ell + \frac{3}{2}}{k} \binom{\ell + n_1 + \frac{1}{2}}{n_1 - k} \binom{\ell + n_2 + \frac{1}{2}}{n_2 - k} \times \\
&\times {}_2F_1\left(\frac{2\beta_2^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}, k + \ell + \frac{5}{2}, k - n_1; k + \ell + \frac{3}{2};\right) {}_2F_1\left(\frac{2\beta_1^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}, k + \ell + \frac{5}{2}, k - n_2; k + \ell + \frac{3}{2};\right)
\end{aligned} \tag{34}$$

В релятивистском случае $T(k) \sim \sqrt{k^2 + m^2}$, формул для матричных элементов $T_{n_1 n_2, \ell}$ для ВФ Кулона–Штурма и псевдокулоновских ВФ в литературе не имеется. Однако для осцилляторных ВФ с помощью формул (27) и (28) можно получить новое соотношение:

$$\begin{aligned}
T_{n_1 n_2, \ell}^{R, OS}(\beta_1, \beta_2) &= \int_0^\infty \Phi_{n_1 \ell}^{*OS}(k, \beta_1) \left(\sqrt{k^2 + m^2}\right) \Phi_{n_2 \ell}^{OS}(k, \beta_2) dk = (-1)^{n_1+n_2} \times \\
&\times \frac{\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} 4^{\ell+2} \sqrt{n_1!} \sqrt{n_2!}}{\sqrt{\Gamma\left(\ell + n_1 + \frac{3}{2}\right)} \sqrt{\Gamma\left(\ell + n_2 + \frac{3}{2}\right)}} \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{\beta_1^2 + \beta_2^2}\right)^{\ell+\frac{5}{2}} \left[\binom{n_1 + \alpha_1}{n_1} \sum_{j=0}^{n_2} \frac{(-1)^j}{j!} \beta_2^j \times \right. \\
&\times \binom{n_2 + \alpha_2}{n_2 - j} W_{j, \ell}^{\beta_1, \beta_2}(m) {}_3F_2\left(-j, -n_1, -j - \alpha_2; -j + n_2 + 1, \alpha_1 + 1; -\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \times \\
&\times {}_3F_2\left(-j, -n_1, -j - \alpha_2; -j + n_2 + 1, \alpha_1 + 1; -\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) + \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)^{n_2} \sum_{j=n_2+1}^{n_1+n_2} \frac{(-1)^j}{(j - n_2)!} \times \\
&\times \beta_1^j \binom{n_1 + \alpha_1}{-j + n_1 + n_2} \frac{W_{j, \ell}^{\beta_1, \beta_2}(m)}{n_2!} \times {}_3F_2\left(j - n_1 - n_2, -n_2, -\alpha_2 - n_2; \right. \\
&\left. j - n_2 + 1, \alpha_1 + j - n_2 + 1; -\frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \left. \right],
\end{aligned} \tag{35}$$

$$W_{j, \ell}^{\beta_1, \beta_2}(m) = 2^{-j-\ell-2} \Gamma\left(j + \ell + \frac{3}{2}\right) U\left(-\frac{1}{2}, -j - \ell - 1, m^2 \frac{(\beta_1^2 + \beta_2^2)}{2\beta_1^2 \beta_2^2}\right). \tag{36}$$

Закключение. В работе найдены матричные элементы для решения вариационным методом уравнений состояния с потенциалами вида (4). Эти формулы позволяют провести расчёты элементов матриц уравнения (11) с заданной точностью. Отметим, что формула (27) с функцией (28) получена впервые. На её основе получены новые выражения матричных элементов, включая вариант с релятивистской кинетической энергией.

Литература

1. Day, J. P. Two-body Problems with Confining Potentials / J. P. Day, J. E. McEwen, Z. Papp // Few-Body Systems. – 2010. – Vol. 47. – P. 17–23.
2. Green's operator for Hamiltonians with Coulomb plus polynomial potentials / E. Kelbert, A. Hyder, F. Demir [et al.] // Journal of Physics A Mathematical General. – 2007. – Vol. 40. – P. 7721–7728.
3. Alhaidari, A. An extended class of L2-series solutions of the wave equation / A. Alhaidari // Annals of Physics. – 2005. – Vol. 317, № 1. – P. 152–174.
4. Srivastava, H. A Treatise on Generating Functions / H. A. Srivastava, H. Manocha // Ellis Horwood series in mathematics and its application. – John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, and Toronto: Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), 1984. – 569 pp.
5. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – 4-е переработанное. – Москва: Гос.изд-во физ.-мат. литературы, 1963. – 1110 с.
6. Erdélyi, A. Über einige bestimmte Integrale, in denen die Whittakerschen M_k , m -Funktionenaufreten / A. Erdélyi // Mathematische Zeitschrift. – 1936. – Vol. 40. – P. 693–702.
7. Srivastava, H. Remarks on some associated Laguerre integral results / H. Srivastava, H. Mavromatis, R. Alassar // Applied Mathematics Letters. – 2003. – Vol.16, № 7. – P. 1131–1136.

У. Е. Возная

Объединенный институт ядерных исследований,
г. Дубна, Российская Федерация

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ К ПРОЦЕССУ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННОЙ АННИГИЛЯЦИИ

Введение. Исследование процесса электрон-позитронной аннигиляции актуально для теоретических предсказаний результатов экспериментов на имеющихся и будущих электрон-позитронных коллайдерах (VEPP, CEPС, ILC) [1–4]. В представленной работе рассматривается процесс электрон-позитронной аннигиляции в Z -бозон или виртуальный фотон. В подходе функций партонных распределений рассчитываются поправки к излучению из начального состояния. Приводятся численные результаты для поправок к полному сечению.

Поправки к излучению из начального состояния. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow Z/\gamma^*$ в подходе партонных распределений можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{ee}^{NLO}(s') = \sum_{i,j=e,\bar{e},\gamma} \int_{\bar{z}_1}^1 dz_1 \int_{\bar{z}_2}^1 dz_2 D_{ie}^{str}(z_1, \frac{\mu_R^2}{\mu_F^2}) D_{je}^{str}(z_1, \frac{\mu_R^2}{\mu_F^2}) \times$$

$$\times (\sigma_{ij}^{(0)}(sz_1 z_2) + \sigma_{ij}^{(1)}(sz_1 z_2) + O(\alpha^2 L^0)) \delta(s' - sz) + O(\frac{\mu_R^2}{\mu_F^2}), \quad (1)$$