Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. СУБХАНКУЛОВ, Ф. И. АН

КОМПЛЕКСНЫЕ ТАУБЕРОВЫ ТЕОРЕМЫ ТИПА ТЕОРЕМЫ КЕЛДЫША С ОСТАТКОМ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 29 VI 1971)

Известна роль тауберовой теоремы Келдыша в спектральной теории ([1], [2]). В работах ([3-7]) нами были получены тауберовы теоремы типа Келдыша с неулучшаемым остатком.

Метод, примененный в работе ([7]), использующий локализованные формулы обращения и принцип Фрагмена — Линделефа с привлечением некоторых дополнительных идей, связанных с многозначностью рассматриваемых функций, позволяет распространить результаты работы ([7]) на случай двустороннего преобразования Стильтьеса.

В дальнейшем под γ_1 и γ_2 будем понимать соответственно линии

$$|y| = c_1(-x)^{\tau_1}, \quad x \leqslant 0, \quad c_1 > 0, \quad 0 \leqslant \tau_1 < 1;$$

$$|y| = c_2x^{\tau_2}, \quad x \geqslant 0, \quad c_2 > 0, \quad 0 \leqslant \tau_2 < 1,$$

а под γ_1^* и γ_2^* — соответственно линии

$$|y| = 2c_1(-x)^{\tau_1}, \quad x \leqslant 0; \quad |y| = 2c_2x^{\tau_2}, \quad x \geqslant 0;$$

под кривой γ (γ^*) — понимать совокупность кривых γ_1 и γ_2 (γ_1^* и γ_2^*), т. е. $\gamma_1 + \gamma_2$ ($\gamma_1^* + \gamma_2^*$).

Функции w^b, $(-w)^b$, $b > 0$, соответственно означают ту ветвь многозначной функции, которая принимает положительные значения соответственно при $w > 0$ и $w < 0$. В силу этого соглашения рассматриваемые ниже интегралы будут однозначными аналитическими функциями во всей плоскости за исключением точек интервалов $(\infty, -a)$ и (a, ∞), принимающие согласно принципу симметрии Римана — Шварца в сопряженных точках сопряженные значения.

Теорема 1. *Пусть* $\psi(u)$ *и* $\varphi(u)$ *не убывают на* $(-\infty, \infty)$, $\psi(u) = \varphi(u) = 0$ *при* $|u| \leqslant a$, $a = \mathrm{const}$, и интегралы

$$\Phi_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u)\,du}{u^{p+1}(u+z)^{\nu+1}}, \quad \Phi_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(u)\,du}{u^{p+1}(u+z)^{\nu+1}},$$

где $p \geqslant 0$ — *целое,* $\nu \geqslant 0$ — *любое, сходятся при* $z \in \gamma$. *Пусть, кроме того,*

$$\Phi_2(z) = \Phi_1(z) + O(|z|^{-\omega}), \quad 0 < \omega < 1, \quad z \in \gamma, \quad z \to \infty.$$

Тогда

1) $$\psi(x) = \varphi(x) + O\left(\frac{\varphi(x)}{x^{1-\tau_1}}\right) + O\left(\frac{|\varphi(-x)|}{x^{2-2\tau_1}}\right) + O(x^{p+\nu+1-\omega}), \quad x \to \infty;$$

2) $$\psi(-x) = \varphi(-x) + O\left(\frac{|\varphi(-x)|}{x^{1-\tau_2}}\right) + O\left(\frac{\varphi(x)}{x^{2-2\tau_2}}\right) + O(x^{p+\nu+1-\omega}), \quad x \to \infty.$$

Теорема 2. *Пусть функции* $\psi(u)$ *и* $\varphi(u)$ *определены так же, как и в предыдущей теореме, и интегралы*

$$F_1(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varphi(u)}{u^m(u+z)^{\alpha+1}}, \quad F_2(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\psi(u)}{u^m(u+z)^{\alpha+1}},$$

где $m \geqslant 0$ — целое, $\alpha \geqslant 0$ — любое, сходятся при $z \in \gamma$ и удовлетворяют условию

$$F_2(z) = F_1(z) + O(|z|^{-\delta}), \quad 0 < \delta < 1, \quad z \in \gamma, \quad z \to \infty.$$

Тогда

$$1)\ \psi(x) = \varphi(x) + O\left(\frac{\varphi(x)}{x^{1-\tau_1}}\right) + O\left(\frac{|\varphi(-x)|}{x^{2-2\tau_1}}\right) + O(x^{m+\alpha+1-\delta}), \qquad x \to \infty;$$

$$2)\ \psi(-x) = \varphi(-x) + O\left(\frac{|\varphi(-x)|}{x^{1-\tau_2}}\right) + O\left(\frac{\varphi(x)}{x^{2-2\tau_2}}\right) + O(x^{m+\alpha+1-\delta}), \qquad x \to \infty,$$

Теорема 3. *Пусть функция $\varphi(u)$ определена так же, как и в теореме 1, и интеграл*

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z^{p+1}\varphi(u)\,du}{u^{p+1}(u+z)},$$

где $p \geqslant 0$ — целое, сходится при $z \in \gamma$ и удовлетворяет условию

$$F(z) = z^{\rho_1}L_1(z) + (-1)^p L_2(-z) + O(|z|^{\rho_0-\sigma}), \quad z \in \gamma, \quad z \to \infty,$$

где $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$, $\rho_0 = \min(\rho_1, \rho_2)$, $\sigma > 0$; функции z^{ρ_1}, $(-z)^{\rho_2}$ принимают положительные вещественные значения соответственно при вещественных z: $z > 0$, $z < 0$; функции $L_1(z)$, $L_2(-z)$ однозначны и аналитичны в соответствующих областях G_1: $|y| \geqslant c_1(-x)^{\tau_1}$, $x \leqslant 0$; G_2: $|y| \geqslant c_2 x^{\tau_2}$, $x \geqslant 0$, и соответственно принимают вещественные значения при вещественных $z: z > 0$ и $z < 0$ и пусть

$$|\mathscr{L}_1(z)| \leqslant C_1 |\mathscr{L}_1(x)|, \quad |z\mathscr{L}_1'(z)| \leqslant C_2 |\mathscr{L}_1(z)|, \quad |z^2\mathscr{L}_1''(z)| \leqslant C_3 |\mathscr{L}_1(z)|;$$

$$|\mathscr{L}_2(-z)| \leqslant C_4 |\mathscr{L}_2(x)|, \ |z\mathscr{L}_2'(-z)| \leqslant C_5 |\mathscr{L}_2(-z)|, \ |z^2\mathscr{L}_2''(-z)| \leqslant C_6 |\mathscr{L}_2(-z)|,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6 — постоянные, $x = |\mathrm{Re}\, z|$, $z \in \gamma$, $z \to \infty$.

Тогда

$$1)\ \varphi(x) = \frac{x^p}{2\pi i}\Delta_{\Gamma_1(\bar z, z)}\{z^{\rho_1-p}\mathscr{L}_1(z)\} + O(x^{\rho_1-1+\tau_1}|\mathscr{L}_1(x)|) +$$
$$+ O(x^{\rho_2-2+2\tau_1}|\mathscr{L}_2(x)|) + O(x^{\rho_0-\sigma}) + O(x^{p-2+2\tau_1+\varepsilon}), \quad x \to \infty;$$

$$2)\ \varphi(-x) = -\frac{x^p}{2\pi i}\Delta_{\Gamma_2(\bar z, z)}\{z^{\rho_2-p}\mathscr{L}_2(z)\} + O(x^{\rho_2-1+\tau_2}|\mathscr{L}_2(x)|) +$$
$$+ O(x^{\rho_1-2+2\tau_2}|\mathscr{L}_1(x)|) + O(x^{\rho_0-\sigma}) + O(x^{p-2+2\tau_2+\varepsilon}), \quad x \to \infty.$$

Здесь $\Delta_{\Gamma_1(\bar z, z)}\{\ldots\}$, $\Delta_{\Gamma_2(\bar z, z)}\{\ldots\}$ означают приращения соответствующих функций $z^{\rho_1-p}\mathscr{L}_1(z)$, $z^{\rho_1-p}\mathscr{L}_2(z)$ по z при изменении z от $\bar z$ до z вдоль соответствующих дуг Γ_1 и Γ_2 кривых γ_1^* и γ_2^*, ε — сколь угодно малое положительное число.

Теорема 4. *Пусть ряды*

$$F_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n^p(\lambda_n + z)^{q+1}}, \quad F_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{\mu_n^p(\mu_n + z)^{q+1}},$$

где $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \to \infty$, $0 > \lambda_{-1} \geqslant \lambda_{-2} \geqslant \ldots \geqslant \lambda_{-n} \to \infty$; $0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n \to \infty$, $0 > \mu_{-1} \geqslant \mu_{-2} \geqslant \ldots \geqslant \mu_{-n} \to \infty$, $a_n > 0$, $a_{-n} < 0$, $a_0 = 0$; $b_n > 0$, $b_{-n} < 0$, $b_0 = 0$, $p \geqslant 0$ — целое, $q \geqslant 0$ — любое, сходятся при $z \in \gamma$ и удовлетворяют условию

$$F_2(z) = F_1(z) + O(|z|^{-\delta}), \quad 0 < \delta < 1, \quad z \in \gamma, \quad z \to \infty.$$

Тогда

$$1)\ \sum_{0<\mu_n\leqslant x} b_n=\sum_{0<\lambda_n\leqslant x} a_n\left\{1+O\left(\frac{1}{x^{1-\tau_1}}\right)\right\}+O\left(\frac{1}{x^{2-2\tau_1}}\left|\sum_{-x\leqslant\lambda_{-n}<0} a_n\right|\right)+$$
$$+O\left(x^{p+q+1-\delta}\right),\quad x\to\infty;$$

$$2)\ \sum_{-x\leqslant\mu_{-n}<0} b_{-n}=\sum_{-x\leqslant\lambda_{-n}<0} a_{-n}\left\{1+O\left(\frac{1}{x^{1-\tau_2}}\right)\right\}+$$
$$+O\left(\frac{1}{x^{2-2\tau_2}}\sum_{0<\lambda_n\leqslant x} a_n\right)+O\left(x^{p+q+1-\delta}\right),\quad x\to\infty.$$

Приведенные выше результаты неулучшаемы. В неулучшаемости теорем 1, 2, 3, например, нетрудно убедиться, применяя их для оценки распределения нулей целой функции

$$f(z)=\frac{\sin\pi z^{1/2}}{\pi z^{1/2}}\,\frac{\sin\pi(-z)^{1/2}}{\pi(-z)^{1/2}},$$

имея в виду оценку

$$\ln f(z)=\pi z^{1/2}+\pi(-z)^{1/2}+O(1),\quad z\in\gamma,\quad \tau_1=\tau_2=1/2,\quad z\to\infty.$$

В связи с полученными здесь результатами отметим работы ([8–10]).

Таджикский государственный университет
им. В. И. Ленина
Душанбе

Поступило
12 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 38 (1951). [2] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951). [3] М. А. Субханкулов, Изв. АН СССР, сер. матем., 25, 225 (1961). [4] М. А. Субханкулов, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 94 (1961). [5] М. А. Субханкулов, Ф. И. Ан, Изв. АН ТаджССР сер. физ.-техн. наук, 1 (1964). [6] Ф. И. Ан, М. А. Субханкулов, Изв. АН УзбССР, сер. физ.-мат. наук, № 2 (1964). [7] М. А. Субханкулов, Ф. И. Ан, ДАН, 185, № 1 (1969). [8] T. Ganelius, Math. Scand., 14 (1964). [9] A. Pleijel, Arkiv Mat., 4, H. 6, 521 (1963). [10] T. Selander, Arkiv Mat., 5, H. 1, 85 (1963).