

В. З. ФЕЙНБЕРГ

КОНЕЧНЫЕ УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком В. М. Глушковым 29 VI 1971)

Ультраметрика на множестве X — это отображение d множества пар $X \times X$ в множество неотрицательных действительных чисел, удовлетворяющее при любых x, y, z из X условиям: 1) $d(x, y) = d(y, x)$; 2) $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$; 3) $d(x, y) \leq \max [d(x, z), d(z, y)]$. Условие 3) является существенным усилением неравенства треугольника. Ультраметрика естественно возникает в теории неархимедово нормированных полей. Цель статьи — классификация конечных ультраметрических пространств. С каждым ультраметрическим пространством (X, d) связывается пара (M, φ) , состоящая из некоторого частично упорядоченного (ч.у.) множества M и специального гомоморфизма φ ч.у. множества M в множество неотрицательных действительных чисел. Доказывается (теоремы 1 и 2), что такая пара полностью характеризует ультраметрическое пространство (X, d) с точностью до изометрии. Отметим, что к рассматриваемым в работе вопросам примыкает задача описания потоковых функций с точностью до эквивалентности ⁽¹⁾ и задача метрической характеристики некоторых графов ⁽²⁾.

Хотя некоторые из приводимых ниже результатов и определений допускают естественное обобщение на бесконечность, предполагается, что все рассматриваемые ниже объекты конечны.

1. Применяя условие $d(x, y) \leq \max [d(x, z), d(z, y)]$ к каждой из сторон треугольника x, y, z и сравнивая полученные соотношения, получаем

Предложение 1. Пусть x, y, z — произвольные точки ультраметрического пространства (X, d) , тогда среди чисел $d(x, y), d(x, z), d(z, y)$ два равны между собой, а третье не больше, чем это их общее значение.

Предложение 2. Пусть x, y, z — точки ультраметрического пространства (X, d) с наибольшим расстоянием. Положим $A = \{x \in X | d(x, a) < d(a, b)\}$, $B = \{x \in X | d(x, a) = d(a, b)\}$.

Тогда 1) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$; 2) $A \cup B = X, A \cap B = \emptyset$; 3) $d(x, y) = d(a, b)$ для любых $x \in A, y \in B$.

Следствие. Пусть A и B, A' и B' определяются точно так же, как и в предложении 2 относительно пары (a, b) и пространства (X, d) и соответственно относительно пары (a', b') и пространства (X', d') .

Тогда если $\psi: X \rightarrow X'$ — изометрическое отображение (X, d) на (X', d') и $a' = \psi(a), b' = \psi(b)$, то сужение $\psi|_A = \psi_1$ является изометрическим отображением (A, d) на (A', d') , а сужение $\psi|_B = \psi_2$ — изометрическим отображением (B, d) на (B', d') .

Обратно, если $\psi_1: A \rightarrow A', \psi_2: B \rightarrow B'$ — изометрические отображения пространств (A, d) и $(A', d'), (B, d)$ и (B', d') соответственно и $d(a, b) = d'(a', b')$, то $\psi: X \rightarrow X'$ — изометрическое отображение (X, d) на (X', d') , где $\psi(x) = \psi_1(x)$, если $x \in A$ и $\psi(x) = \psi_2(x)$, если $x \in B$.

2. Т-упорядоченные множества и связанные с ними ультраметрические пространства. Пусть M — ч.у. множество с отношением частичного порядка $\leq$. Будем писать $x \| y$, если элементы не сравнимы в M . Точную верхнюю грань x и y обозначим $x \cup y$. Условимся соотношению $x \leq \max(y, z)$ понимать следующим образом. Если y и z сравнимы в M , то x не больше наибольшего из них, если же $z \| y$, то $x \leq y, x \leq z$.

Ч.у. множество M назовем T -упорядоченным, если 1) для любого $x \in M$ ч.у. множество $\{y \in M \mid y \geq x\}$ линейно упорядочено; 2) для любых $x, y \in M$ существует $z \in M$ такой, что $z \geq x, z \geq y$. В силу условия 1) T -упорядоченное множество обладает в точности одним максимальным элементом. Нетрудно видеть, что для любых $x, y \in M$ существует $x \cup y$. Основную роль в классификации ультраметрических пространств играет следующее характеристическое свойство T -упорядоченных множеств. Для любых x, y, z

$$x \cup y \leq \max(x \cup z, z \cup y). \quad (1)$$

Предложение 3. Для ч.у. множества M следующие два условия эквивалентны: 1) M — T -упорядоченное множество; 2) для любых $x, y \in M$ существует $x \cup y$ и для любой тройки $x, y, z \in M$ выполняется соотношение (1).

Пусть каждому элементу x T -упорядоченного множества M поставлено в соответствие действительное неотрицательное число $\varphi(x)$, так что

1) $\varphi(x) = 0$ тогда и только тогда, когда x — минимальный элемент ч.у. множества M ;

2) если $x \leq y$, то $\varphi(x) \leq \varphi(y)$.

T -упорядоченное множество M , рассматриваемое вместе с отображением φ , удовлетворяющим условиям 1 и 2, назовем парой и обозначим (M, φ) . Ультраметрическим пространством пары (M, φ) назовем ультраметрическое пространство (X, d) , где X — множество всех минимальных элементов ч.у. множества M , а ультраметрика определяется формулой

$$d(x, y) = \varphi(x \cup y), \quad x, y \in X. \quad (2)$$

Неотрицательная функция $d(x, y)$, определенная согласно (2), действительно является ультраметрикой. Условия 1 и 2 определения ультраметрики непосредственно следуют из свойств функции φ и операции $\cup$. В то же время из предложения 3 следует, что для любой тройки $x, y, z \in M$ выполняется соотношение (1). Поэтому в силу условия 2 определения функции φ имеем $\varphi(x \cup y) \leq \max[\varphi(x \cup z), \varphi(z \cup y)]$. Но это и означает, что $d(x, y) \leq \max[d(x, z), d(z, y)]$.

3. Отображение $f: M \rightarrow M'$ назовем изоморфизмом пар (M, φ) и (M', φ') , если f — изоморфизм ч.у. множеств M и M' и $\varphi(x) = \varphi'(f(x))$.

Предложение 4. Всякий изоморфизм $f: M \rightarrow M'$ пар (M, φ) и (M', φ') естественным образом индуцирует изометрическое отображение ультраметрических пространств пар (M, φ) и (M', φ') .

Существенным для нас является обращение предложения 4 для случая регулярных пар (см. теорему 1). Если регулярность пар незначительно нарушается, то обращение не имеет места.

T -упорядоченное множество M назовем регулярным, если для каждого не минимального $x \in M$ число элементов, непосредственно предшествующих x , не меньше двух. Отображение φ , удовлетворяющее условиям 1 и 2 (см. выше), назовем регулярным, если $x < y$ влечет $x, y \in M$. Пара (M, φ) называется регулярной, если M и φ регулярны.

Предложение 5. T -упорядоченное множество M регулярно тогда и только тогда, когда каждый не минимальный элемент $x \in M$ можно представить в виде $x = y \cup z$, где $y \neq z$ и y, z — минимальные элементы M .

Следствие. $\max d(x, y) = \varphi(t)$, где $x, y \in X$, X — пространство регулярной пары (M, φ) , t — максимальный элемент M .

Теорема 1. Пусть $(X, d), (X', d')$ — ультраметрические пространства регулярных пар (M, φ) и (M', φ') соответственно, и пусть ψ — изометрическое отображение X на X' .

Тогда ψ можно продолжить до изоморфизма пар (M, φ) и (M', φ') и такое продолжение единственно.

Доказательство. Если $|X| = 2$, то (M, φ) обязательно имеет вид $M = \{a, b, c\}$, $X = \{a, b\}$, $l < a, l < b, a \parallel b$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, $\varphi(l) =$

$= d(a, b)$. Очевидно, в этом случае теорема справедлива. Докажем единственность продолжения. Пусть $f: M \rightarrow M'$ — изоморфизм пар и $f|X = \psi$. В силу предложения 5, если $x \in M$, $x \notin X$, то $x = z \cup y$, где $z, y \in X$. Но так как f — изоморфизм ч.у. множеств M и M' , то $f(z \cup y) = f(z) \cup f(y)$. Учитывая это и $f(z) = \psi(z)$, $f(y) = \psi(y)$, имеем $f(x) = f(z \cup y) = \psi(z) \cup \psi(y)$. Таким образом, $f(x)$ зависит только от функции ψ . Единственность доказана.

Доказательство существования изоморфизма $f: M \rightarrow M'$ пар (M, φ) и (M', φ') такого, что $f|X = \psi$ проведем индукцией по числу элементов X . Пусть $A \subset X$, $B \subset X$, $a, b \in X$ — такие же, как и в предложении 2. Обозначим $M_1 = X(A)$ множество всех тех элементов T -упорядоченного множества M , каждый из которых меньше или равен некоторому элементу из A (A рассматривается как подмножество ч.у. множества M). Аналогично определяется и $M_2 = X(B)$. Очевидно, M_1 и M_2 — T -упорядоченные множества и причем такие, что если $x \in M_1$ (или $x \in M_2$) и $y \geq x$, $y \in M$, то $y \in M_1$ (или $y \in M_2$). Отсюда следует, что $x \parallel y$ для $x \in M_1$, $y \in M_2$, $x \neq m$, $y \neq m$. Так как $A \cup B = X$, то $M_1 \cup M_2 = M$.

Покажем, что $M_1 \cap M_2 = \{m\}$, где m — максимальный элемент T -упорядоченного множества M . В самом деле, если $z \in M_1 \cap M_2$, то $z \geq x \in A$, $z \geq y \in B$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $z = x \cup y$. Но согласно предложению 2 $d(x, y) = d(a, b)$ для любых $x \in A$, $y \in B$. Следовательно, $d(a, b) = d(x, y) = \varphi(x \cup y) = \varphi(z)$. Так как $m \geq z$, то $\varphi(m) \geq \varphi(z)$. Учитывая, что $d(a, b) = \varphi(z)$ — наибольшее расстояние, то по следствию предложения 5 имеем $\varphi(m) = d(a, b) = \varphi(z)$. Отсюда в силу регулярности φ получаем $z = m$. А так как m заведомо лежит и в M_1 , и в M_2 , то $M_1 \cap M_2 = \{m\}$. Очевидно, A совпадает с пространством пары (M_1, φ_1) , а B — с пространством пары (M_2, φ_2) , где $\varphi_1 = \varphi|_{M_1}$, $\varphi_2 = \varphi|_{M_2}$. Таким образом, получается разложение пространства X , $X = A \cup B$, $A \cap B = \phi$ на два попарно непересекающихся непустых пространства, и это разложение индуцирует разложение пары (M, φ) на пары (M_1, φ_1) , (M_2, φ_2) , где $M_1 \cup M_2 = M$, $M_1 \cap M_2 = \{m\}$, и $x \parallel y$ для любых $x \in M_1$, $y \in M_2$, $x \neq m$, $y \neq m$. Понятно, что такое же утверждение справедливо и для пространства X' .

Условимся обозначение объекта в X' , аналогичного объекту в X , получать из обозначений этого объекта в X добавлением штриха. Если в качестве пары (a', b') в пространстве X' взять пару $a' = \psi(a)$, $b' = \psi(b)$, то по следствию предложения 2 изометрическое отображение $\psi: X \rightarrow X'$ индуцирует изометрическое отображение $\psi_1: A \rightarrow A'$, $\psi_2: B \rightarrow B'$, где $\psi_1 = \psi|_A$, $\psi_2 = \psi|_B$. Предположим, что пары (M_1, φ_1) и (M'_1, φ'_1) , (M_2, φ_2) и (M'_2, φ'_2) регулярны, тогда из $|A| < |X|$, $|B| < |X|$ следует, что предположение индукции можно применить к пространствам A, A', B, B' , парам (M_1, φ_1) , (M'_1, φ'_1) , (M_2, φ_2) , (M'_2, φ'_2) , изометрическим отображениям ψ_1 и ψ_2 соответственно. В результате получим изоморфизмы $f_1: M_1 \rightarrow M'_1$, $f_2: M_2 \rightarrow M'_2$ соответствующих пар. Учитывая, что заведомо $f_1(m) = f_2(m) = m'$ и что $M_1 \cup M_2 = M$, $M_1 \cap M_2 = \{m\}$ и $x \parallel y$, если $x \in M_1$, $y \in M_2$, $x \neq m$, $y \neq m$, получим требуемое изоморфное отображение $f: M \rightarrow M'$ пар (M, φ) и (M', φ') , если положим $f|_{M_1} = f_1$, $f|_{M_2} = f_2$. Если регулярность рассматриваемых пар нарушается, то требуется дополнительное рассмотрение, которое мы здесь опускаем.

Теорема 2. *Ультраметрическое пространство изометрично ультраметрическому пространству некоторой регулярной пары.*

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по числу точек ультраметрического пространства (X, d) . Если $|X| = 2$, $X = \{a, b\}$, $d(a, b) = d$, то пара (M, φ) , где $M = \{a, b, c\}$, $a \parallel b$, $l < a$, $l < b$, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, $\varphi(l) = d(a, b)$, очевидно, удовлетворяет требованиям теоремы. Пусть $|X| > 2$ и a, b — точки X с наибольшим расстоянием и пусть A и B такие же, как в предложении 2. Заметим, что если для

любых $x, y \in A$, $d(x, a) < d(a, b)$, $d(y, a) < d(a, b)$, то в силу предложения 1 $d(x, y) < d(a, b)$.

Подмножества множества X рассматриваются как подпространства пространства X с индуцированной метрикой.

Формально для нашего доказательства нужно рассмотреть четыре случая: 1) $|A| > 1$, $|B| > 1$; 2) $|A| > 1$, $|B| = 1$; 3) $|A| = 1$, $|B| > 1$; 4) $|A| = |B| = 1$.

В случае 4), очевидно, $|X| = 2$, а эта ситуация рассмотрена выше. Так как $|A| < |X|$, $|B| < |X|$, то, по предложению индукции, A изометрично пространству некоторой регулярной пары (M_1, φ_1) , если, конечно, $|A| > 1$ и B изометрично пространству некоторой регулярной пары (M_2, φ_2) , если $|B| > 1$. Можно считать, что $M_1 \cap M_2 = \emptyset$. Обозначим m_1, m_2 — единственные максимальные элементы T -упорядоченных множеств M_1 и M_2 соответственно.

Случай $|A| > 1$, $|B| > 1$. Предположим, что $\varphi_2(m_2) \neq d(a, b)$. В силу следствия предложения 5 это может быть только в случае $\varphi_2(m_2) < d(a, b)$. Определим пару (M, φ) следующим образом. Положим $M = M_1 \cup M_2 \cup \{l\}$ и будем считать, что множество M на подмножествах M_1 и M_2 упорядочено так же, как ч.у. множества M_1 и M_2 соответственно. Кроме того, для любого $x \in M_1 \cup M_2$ положим $l > x$; если же $y \in M_1$, $x \in M_2$, то считаем $x \| y$. Нетрудно проверить, что так определенное ч.у. множество является регулярным T -упорядоченным множеством, если таковыми являются M_1 и M_2 . По определению полагаем $\varphi|_{M_1} = \varphi_1$, $\varphi|_{M_2} = \varphi_2$, $\varphi(l) = d(a, b)$. Так как φ_1 и φ_2 регулярны и $\varphi(m_2) < \varphi_2(m_2) < d(a, b)$, то для регулярности φ надо, очевидно, проверить лишь что $\varphi(m_1) < \varphi(l) = d(a, b)$. В силу следствия предложения 5 $\varphi(m_1) = \varphi_1(m_1)$ равно наибольшему расстоянию между двумя элементами пространства пары (M_1, φ_1) , изометрическому пространству A . Но выше мы видели, что для любых $x, y \in A$ $d(x, y) < d(a, b)$, и поэтому $\varphi(m_1) = \varphi_1(m_1) < d(a, b) = \varphi_2(l)$. Следовательно, пара (M, φ) регулярна. Пусть x — минимальный элемент множества M_1 , y — минимальный элемент множества M_2 , тогда в T -упорядоченном множестве M , очевидно, имеем $x \cup y = l$. Поэтому расстояние между x и y в ультраметрическом пространстве пары (M, φ) равно $\varphi(l) = d(a, b)$. Отсюда из предположения индукции и из условия 3 предложения 2 вытекает, что отображение ψ , которое на A равно φ_1 , а на B равно φ_2 , является изометрическим отображением пространства X на пространство регулярной пары (M, φ) . Здесь φ_1 и φ_2 — изометрические отображения пространств A и B на соответствующие пространства пар (M_1, φ_1) , (M_2, φ_2) . В случае, если $\varphi_2(m_2) = d(a, b)$, надо положить $l = m_2$. Тогда так же, как и выше, нетрудно убедиться в том, что (M, φ) — регулярная пара и что X изометрично пространству пары (M, φ) .

Нетрудно понять, что случаи $|A| > 1$, $|B| = 1$ и $|A| = 1$, $|B| > 1$ полностью укладываются в схему рассуждений, проведенных для случая $|A| > 1$, $|B| > 1$. Теорема доказана.

Сравнивая теоремы 1 и 2, получаем, что регулярная пара (M, φ) , ультраметрическое пространство которой изометрично данному ультраметрическому пространству (X, d) , является полным инвариантом пространства (X, d) .

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
22 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Форд, Д. Фалкерсон, Потоки в сетях, М., 1966. ² А. А. Зыков, Теория конечных графов, 1, «Наука», 1966.