

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

Б. ШАПИРОВСКИЙ

О ДИСКРЕТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ. ВЕС, ТЕСНОТА И ЧИСЛО СУСЛИНА

(Представлено академиком П. С. Александровым 25 VI 1971)

Определения обозначений и понятий, используемых в работе, можно найти в (1-4). Целесообразно отметить следующее. Пусть X — топологическое пространство, $M \subset X$ и γ — семейство подмножеств X . Тогда $\bar{c}(X) = \sup \{c(A) : A \subset X\}$, $\text{exp}_\tau M = \{A : A \subset M, |A| \leq \tau\}$, $M_\tau = \bigcup \{[A] : A \in \text{exp}_\tau M\}$, $\gamma_\tau = \{U_\xi : \xi \in \text{exp}_\tau \gamma\}$, где $U_\xi = \bigcup \{V : V \in \xi\}$.

Лемма 1. Пусть $Y \subset X$, γ — семейство открытых в X множеств такое, что $Y \subset \bigcup \{V : V \in \gamma\}$ и для всех $U \in \gamma_{\bar{c}(X)}$ и $A \in \text{exp}_{\bar{c}(X)} Y$, если $G = (X \setminus U) \setminus [A] \neq \Lambda$, то $G \cap Y \neq \Lambda$.

Тогда существуют $Y' \in \text{exp}_{\bar{c}(X)} Y$ и $U \in \gamma_{\bar{c}(X)}$ такие, что $X = [Y'] \cup U$.

Доказательство. Предположив противное, построим дискретное множество M , для которого $|M| \geq \bar{c}(X)^+$. Пусть уже построены $\{x_\alpha : \alpha < \alpha' < \Omega_{\bar{c}(X)}^+\}$ и $\{U_\alpha : \alpha < \alpha'\}$ такие, что для всех $\beta < \alpha' : 1) x_\beta \in U_\beta \cap Y$, где $U_\beta \in \gamma$; 2) $\{x_\alpha : \alpha < \beta\} \cap [\{x_\alpha : \alpha \geq \beta\}] = \Lambda$; 3) $[\{x_\alpha : \alpha < \beta\}] \cap \{x_\alpha : \alpha \geq \beta\} = \Lambda$. Выберем $x_{\alpha'}$ и $U_{\alpha'}$. В силу предположения $G = (X \setminus \bigcup \{U_\alpha : \alpha < \alpha'\}) \setminus [\{x_\alpha : \alpha < \alpha'\}] \neq \Lambda$. Тогда, по условию, существуют $x \in G \cap Y$ и $U \in \gamma$ такие, что $x \in U$. Положим $x = x_{\alpha'}$, $U = U_{\alpha'}$. Итак, можно считать построенным $M = \{x_\alpha : \alpha < \Omega_{\bar{c}(X)}^+\}$, удовлетворяющее свойствам 1) — 3), откуда и вытекает дискретность M . Но $|M| \geq \bar{c}(X)^+$, что противоречиво.

Если в качестве γ взять произвольное открытое покрытие и положить $Y = X$, то получим

Предложение 1. Для всякого открытого покрытия γ существуют $\gamma' \subset \gamma$ и $F \subset X$ такие, что $|\gamma'| \leq \bar{c}(X)$, $S(F) \leq \bar{c}(X)$ и $X = F \cup \bigcup \{V : V \in \gamma'\}$.

Из предложения 1, учитывая, что $\psi(X) \leq 2^{s(X)}$ для хаусдорфовых пространств и $w(X) \leq 2^{s(X)}$ — для регулярных, получаем

Утверждение 1. Если X — хаусдорфово пространство, то $\psi(X) \leq 2^{\bar{c}(X)}$.

Утверждение 1'. Если X — регулярное пространство, то $\bar{\text{ic}}(X) \leq 2^{\bar{c}(X)}$ *.

С помощью предложения 1 нетрудно доказать также

Предложение 2. Если в каждое открытое покрытие γ можно вписать открытое покрытие γ' такое, что $|\{U : x \in U \in \gamma'\}| \leq \bar{c}(X)$ для всех $x \in X$, то $\text{ic}(X) \leq \bar{c}(X)$.

Следствие 1. Если X — наследственно суслинское пространство, во всякое открытое покрытие которого можно вписать точечно-счетное открытое покрытие, то X — финально-компактно **.

* $\text{ic}(X) \leq \tau$, если из всякого открытого покрытия можно выбрать подпокрытие мощности $\leq \tau$ (см. (2)). $\text{ic}(X) = \sup \{\text{ic}(Y) : Y \subset X\}$.

** Говорят, что X — наследственно суслинское пространство, если $\bar{c}(X) \leq \aleph_0$.

Предложение 3. Пусть X — хаусдорфово пространство.

Тогда для всех $x \in X$ существуют G и F такие, что $x \in G \subset F \subset X$, $\psi(G, X) \leq \bar{c}(X)$ и $S(F) \leq \bar{c}(X)$.

Доказательство. Пусть γ — открытое покрытие $X \setminus \{x\}$ и для всех $U \in \gamma$ $x \notin [U]$. В силу предложения 1 $X \setminus \{x\} = F' \cup \bigcup \{V : V \in \gamma'\}$, где $\gamma' \subset \gamma$, $|\gamma'| \leq \bar{c}(X)$, $S(F') \leq \bar{c}(X)$. Ясно, что $F = F' \cup \{x\}$ и $G = \bigcap \{X \setminus [V] : V \in \gamma'\}$ — искомые множества. Если F' замкнуто в X , то $\{x\} = G \cap (X \setminus F')$ и, следовательно, $\psi(x, X) \leq \bar{c}(X)$. Итак, доказано.

Предложение 3'. Пусть X — хаусдорфово пространство, $x \in X$ и $x \notin (X \setminus \{x\})_{\bar{c}(x)}$.

Тогда $\psi(x, X) \leq \bar{c}(X)$.

Теорема 1. Пусть X — хаусдорфово пространство.

Тогда $t(X) \leq \bar{c}(X) h(X)$ *.

Доказательство. Пусть $M \subset X$ и $[M] \neq M$. Покажем, что тогда $M_{\bar{c}(x)h(x)} \neq M$. Действительно, если $x \in [M] \setminus M_{\bar{c}(x)h(x)}$, то в силу предложения 3' $\psi(x, M \cup \{x\}) \leq \bar{c}(X)$. Кроме того, существует бикомпакт $F \subset X$, $x \in F$, для которого $\chi(F, X) \leq h(X)$. Тогда существует γ — семейство открытых в X множеств такое, что $|\gamma| \leq \bar{c}(X)$, $\{x\} = (M \cup \{x\}) \cap \bigcap \{U : U \in \gamma\}$ и $F \cap \bigcap \{U : U \in \gamma\} = F \cap \bigcap \{[U] : U \in \gamma\}$. Последнее возможно, так как F — бикомпакт. Значит, $x \in H = F \cap \bigcap \{U : U \in \gamma\}$, H — бикомпакт и $H \cap M = \Lambda$. Поэтому $\chi(H, F) = \psi(H, F) \leq \bar{c}(X)$, и так как $\chi(H, X) \leq \chi(H, F) \cdot \chi(F, X)$ (*), то $\chi(H, X) \leq \bar{c}(X) h(X)$. Пусть η — база H в X и $|\eta| \leq \bar{c}(X) h(X)$. Для всякого $U \in \eta$ зафиксируем $x(U) \in M \cap U$. Ясно, что $\{x(U) : U \in \eta\} \cap H \neq \Lambda$, иначе η — не база H в X . Но $\{x(U) : U \in \eta\} \subset M$ и $|\{x(U) : U \in \eta\}| \leq \bar{c}(X) h(X)$. Следовательно, $M_{\bar{c}(x)h(x)} \neq M$ для любого незамкнутого $M \subset X$. Но очевидно, что для всякого кардинала τ $(M_\tau)_\tau = M_\tau$. Поэтому $M_{\bar{c}(x)h(x)} = [M]$, а это и означает, что $t(X) \leq \bar{c}(X) h(X)$.

Теорема 2. Пусть X — хаусдорфово k -пространство.

Тогда $t(X) \leq \bar{c}(X)$ **.

Доказательство. Если $H \subset X$ и H — бикомпакт, то $h(H) = 1$ и $t(H) \leq \bar{c}(H) \leq \bar{c}(X)$ в силу теоремы 1. Но так как X — k -пространство, то $t(X) = \sup\{t(H) : H \subset X, H \text{ — бикомпакт}\}$ и, следовательно, $t(X) \leq \bar{c}(X)$.

Лемма 2. Пусть X, Y и γ удовлетворяют условиям леммы 1 и, кроме того, для всех $x \in Y$, γ — псевдобаза x в X .

Тогда $X = Y_{\bar{c}(x)}$.

Доказательство. Пусть $x_0 \notin Y$. Тогда для всех $x \in Y$ существует $x \in U_x \in \gamma$ такое, что $x_0 \notin U_x$. Положим $\tilde{\gamma} = \{U_x : x \in Y\}$. Y и $\tilde{\gamma}$ удовлетворяют условиям леммы 1. Поэтому существуют $Y' \subset Y$ и $U' \in \tilde{\gamma}_{\bar{c}(x)}$, для которых $X = [Y'] \cup U'$ и $|Y'| \leq \bar{c}(X)$. Но $x_0 \notin U'$, значит, $x_0 \in [Y'] \subset Y_{\bar{c}(x)}$. Следовательно, $X = Y_{\bar{c}(x)}$.

Теорема 3. Пусть X — хаусдорфово пространство.

Тогда существует $Y \subset X$ такое, что $|Y| \leq 2^{\bar{c}(X)}$ и $X = Y_{\bar{c}(x)}$ ***.

Доказательство. Пусть для всех $\alpha < \alpha' < \Omega_{\bar{c}(x)}^+$ уже построены Y^α и γ^α такие, что γ^α — псевдобаза для всех $y \in Y^\alpha$, $|\gamma^\alpha| \leq 2^{\bar{c}(X)}$ и $|Y^\alpha| \leq 2^{\bar{c}(X)}$. Положим $\tilde{\gamma}^{\alpha'} = \bigcup \{\gamma^\alpha : \alpha < \alpha'\}$, $\tilde{Y}^{\alpha'} = \bigcup \{Y^\alpha : \alpha < \alpha'\}$, и для всех

* $h(x, X) = \min \{\chi(F, X) : x \in F \subset X, F \text{ — бикомпакт}\}$. $h(X) = \sup \{h(x, X) : x \in X\}$ — высота пространства X . Это понятие принадлежит А. В. Архангельскому (*).

** Аналогичный результат независимо получен А. В. Архангельским.

*** Из теоремы 3 непосредственно следует: если X — хаусдорфово пространство, то $S(X) \leq 2^{\bar{c}(X)}$ и $|X| \leq 2^{2\bar{c}(X)}$. Эти результаты впервые были получены в (5) методом ветвящихся систем. Заметим, что и теорема 3 может быть доказана тем же методом. Кроме того, из доказательства теоремы 3 легко вытекает: если X — T_1 -пространство, то $S(X) \leq (2 \cdot \psi(X))^{\bar{c}(X)}$ и, следовательно, $|X| \leq 2^{\psi(X)\bar{c}(X)}$. Последнее неравенство также впервые доказано в (5) с помощью комбинаторных теорем.

$A \in \exp_{\bar{c}(x)} \bar{Y}^{\alpha'}$ и $U \in \bar{\gamma}_{\bar{c}(X)}^{\alpha'}$ зафиксируем $x(U, A) \in G = (X \setminus U) \setminus [A]$,

если $G \neq \Lambda$. В силу утверждения 1 для всех $x \in X$ существует η_x — псевдобаза x в X , такая, что $|\eta_x| \leq 2^{\bar{c}(x)}$. Положим $Y^{\alpha'} = \{x(U, A): U \in \bar{\gamma}_{\bar{c}(X)}^{\alpha'}, A \in \exp_{\bar{c}(x)} \bar{Y}^{\alpha'}\}$ и $\gamma^{\alpha'} = \bigcup \{\eta_x: x \in Y^{\alpha'}\}$. Итак, для всех $\alpha < \Omega_{\bar{c}(X)}^+$ определены Y^{α} и γ^{α} . Тогда в силу построений $Y = \bigcup \{Y^{\alpha}: \alpha < \Omega_{\bar{c}(X)}^+\}$ и $\gamma = \bigcup \{\gamma^{\alpha}: \alpha < \Omega_{\bar{c}(X)}^+\}$ удовлетворяют условиям леммы 2 и, следовательно, $X = Y_{\bar{c}(X)}$. Кроме того, для всех α $|Y^{\alpha}| \leq 2^{\bar{c}(x)}$, откуда $|Y| \leq 2^{c(X)}$.

Введем следующие обозначения: $\pi w(X) = \min \{|B|: B - \pi\text{-база в } X\}$ — π -вес X , $\psi w(X) = \min \{|B|: B - \text{псевдобаза в } X\}$ — псевдовес X , $\text{sw}(X) = \min \{|\xi|: \xi - \text{сеть в } X\}$ — сетевой вес X . Кроме того, обозначим через $w_1(X)$ мощность семейства всех канонических замкнутых в X множеств. Отметим, что для регулярного пространства $w(X) \leq w_1(X)$.

Лемма 3. Пусть $X = Y_{\tau}$.

Тогда, если пространство X — хаусдорфово, то $\psi w(X) \leq |Y|^{\tau}$; если X регулярно, то $\text{sw}(X) \leq |Y|^{\tau}$.

Доказательство. Положим $\xi = \{[A]: A \in \exp_{\tau} Y\}$. Ясно, что $|\xi| \leq |Y|^{\tau}$. Если $x \in V \subset [V] \subset U$, то существует $A \subset V \cap Y$ такое, что $|A| \leq \tau$ и $x \in [A]$. Но $[A] \in \xi$ и $x \in [A] \subset U$. Значит, если X регулярно, то ξ — сеть в X . Если X хаусдорфово и $x_0 \in X$, то для всех $x \in X$, $x \neq x_0$, существует $H_x \in \xi$ такое, что $x \in H_x \subset X \setminus \{x_0\}$. Следовательно, $\{X \setminus H: H \in \xi\}$ — псевдобаза в X .

Из теоремы 3 и леммы 3 следует

Предложение 4. Если пространство X хаусдорфово, то $\psi w(X) \leq 2^{\bar{c}(X)}$; если X регулярно, то существует ξ — сеть в X такая, что $|\xi| \leq 2^{\bar{c}(X)}$ и для всех $H \in \xi$ $S(H) \leq \bar{c}(X)$.

Следствие 2. Если X — хаусдорфово наследственно суслинское пространство, то $\psi w(X) \leq 2^{\aleph_0}$; если, кроме того, X регулярно, то в X существует сеть мощности $\leq 2^{\aleph_0}$ из сепарабельных множеств.

Из предложения 4 вытекает

Теорема 4. Пусть X — регулярное пространство и $\mathcal{T}$ — семейство всех открытых в X множеств.

Тогда $|X| \leq |\mathcal{T}| \leq 2^{2^{\bar{c}(X)}}$.

Следствием леммы 3 является

Предложение 5. Если пространство X хаусдорфово, то $\psi w(X) \leq S(X)^{t(X)}$; если X регулярно, то $\text{sw}(X) \leq S(X)^{t(X)}$ и для всякого замкнутого $F \subset X$ $\psi(F, X) \leq S(X)^{t(X)}$.

Лемма 4. Пусть X — регулярное пространство.

Тогда $w(X) \leq w_1(X) \leq \pi w(X)^{c(X)}$.

Доказательство. Пусть B — π -база в X , U — открыто в X , ξ' — максимальное среди открытых дизъюнктивных семейств $\xi \subset B$ таких, что $\bigcup \{V: V \in \xi\} \subset U$, и $U' = \bigcup \{V: V \in \xi'\}$. Так как $|\xi'| \leq c(X)$ в силу дизъюнктивности и $[U] = [U']$ в силу максимальной ξ' , то $w_1(X) \leq |B|^{c(X)}$, что и доказывает лемму.

Предложение 6. Пусть X — регулярное пространство.

Тогда $w(X) \leq w_1(X) \leq S(X)^{t(X)c(X)} + h(X)^{c(X)}$.

Доказательство. Пусть F — бикомпакт и $x \in F \subset X$. Тогда $\chi(x, F) = \psi(x, F) \leq \psi(x, X)$ и, так как $\chi(x, X) \leq \chi(x, F) + \chi(F, X)$, то $\chi(X) \leq \psi(X)h(X)$. Кроме того, $\pi w(x) \leq S(X)\chi(X) \leq S(X)\psi(X)h(X)$ и в силу предложения 5 и леммы 4 имеем $w_1(X) \leq (S(X)^{t(X)} + h(X))^{c(X)}$.

Теорема 5. Пусть X регулярно, $[Y] = X$ и Y — пространство точечно-счетного типа.

Тогда $w(X) \leq w_1(X) \leq 2^{t(Y)c(Y)} \leq 2^{t(X)c(X)}$.

Доказательство. Из доказательства леммы 2 работы (1) и лемм 5, 6 той же работы можно извлечь следующий результат: если Z — хаусдорфово пространство, то $S(Z) \leq 2^{t(Z)c(Z)h(Z)}$. С помощью несложного вычисления из предложения 6 получаем $w(Y) \leq 2^{t(Y)c(Y)}$. Так как $[Y] = X$, то

$c(Y) = c(X)$. Кроме того, в силу регулярности X $\text{lw}(X) = \text{lw}(Y)$. Следовательно, по лемме 4

$$w_1(X) \leq (2^{i(Y)c(Y)})^{c(X)} \leq 2^{i(Y)c(Y)} \leq 2^{i(X)c(X)}.$$

Из теорем 1 и 5 непосредственно следует

Теорема 6. Пусть X — регулярное пространство точечно-счетного типа.

Тогда $w(X) \leq w_1(X) \leq 2^{\bar{c}(X)}$.

Теорема 7. Во всяком пространстве X существует $Y \subset X$ такое, что $[Y] = X$ и $\bar{ic}(Y) \leq \bar{c}(X)$.

Доказательство. Пусть $S(X) = \tau \geq \bar{c}(X)^+$ (в противном случае доказательство очевидно), $\bar{Y} = \{y_\beta: \beta < \Omega_\tau\}$ и $[\bar{Y}] = X$. Выберем из $\bar{Y}$ искомое множество. Пусть уже определены $\{y_{\beta(\alpha)}: \alpha < \alpha' < \Omega_\tau\}$. Так как $U_{\alpha'} = X \setminus F_{\alpha'} \neq \Lambda$, где $F_{\alpha'} = [\{y_{\beta(\alpha)}: \alpha < \alpha'\}]$, то существует $\varepsilon = \min \{\beta: y_\beta \in U_{\alpha'}\}$. Положим $y_{\beta(\alpha)} = y_\varepsilon$ и покажем, что построенное таким образом множество $Y = \{y_{\beta(\alpha)}: \alpha < \Omega_\tau\}$ всюду плотно в X . Действительно, если $X \setminus [Y] = U \neq \Lambda$, то существует $y_\varepsilon \in U \cap \bar{Y}$. Заметим, что для всех α $\beta(\alpha) \geq \alpha$. Поэтому $\varepsilon < \varepsilon + 1 \leq \beta(\varepsilon + 1) = \min \{\beta: y_\beta \in U_{\varepsilon+1}\}$. Следовательно, $y_\varepsilon \in X \setminus U_{\varepsilon+1} = F_{\varepsilon+1} = [\{y_{\beta(\alpha)}: \alpha < \varepsilon + 1\}] \subset [Y]$, что противоречиво. Итак, $[Y] = X$.

Докажем теперь, что $\bar{ic}(Y) \leq \bar{c}(X)$. Если $\bar{ic}(Y) > \bar{c}(X)$, то существует $Z = \{z_\delta: \delta < \Omega_{\bar{ic}(Y)}^+\} \subset Y$ такое, что для всех $\beta < \Omega_{\bar{c}(X)}^+$ $U_\beta = \{z_\delta: \delta < \beta\}$ открыто в Z . Так как $\gamma = \{U_\beta: \beta < \Omega_{\bar{c}(X)}^+\}$ — открытое покрытие Z , $|U_\beta| \leq \bar{c}(X)$ для всех $U_\beta \in \gamma$, и $\bar{c}(Z) \leq \bar{c}(X)$, то, по предложению 1, для всякого $\bar{Z} \subset Z$ $S(\bar{Z}) \leq \bar{c}(X)$. Но, с другой стороны, в силу построения Y для всякого $M \subset Y$ такого, что $|M| = \lambda^+$, существует $M' \subset M$, для которого $|M'| = S(M') = \lambda^+$. Следовательно, существует $Z' \subset Z$ такое, что $S(Z') = \bar{c}(X)^+$. Противоречие получено, значит, $\bar{ic}(Y) \leq \bar{c}(X)$, и доказательство завершено.

Следствие 3. Во всяком наследственно суслинском пространстве существует наследственно финально-компактное всюду плотное подмножество.

Отметим, что предложение 4 и лемма 4 дают следующее очевидное усиление теоремы 6: если X регулярно и $X = [\{x: \chi(x, X) \leq 2^{\bar{c}(X)}\}]$ (в частности, если $X = (\{x: \chi(x, X) = \psi(x, X)\})$), то $w(X) \leq w_1(X) \leq 2^{\bar{c}(X)}$.

Таким образом, вопрос о весе наследственно суслинских регулярных пространств сводится в силу теоремы 7 к вопросу о весе наследственно финально-компактных регулярных пространств. В связи с этим возникает необходимость повторить проблему, поставленную в (6).

Проблема 1. Верно ли, что вес всякого наследственно финально-компактного регулярного пространства не превосходит $2^{\aleph_0}$?

В этой же работе (6) показано, что в классе хаусдорфовых пространств проблема 1 решается отрицательно.

Проблема 2. Верно ли, что всякое наследственно финально-компактное регулярное пространство имеет счетную тесноту?

Автор выражает признательность А. В. Архангельскому за помощь, внимание и поддержку.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. В. Архангельский, ДАН, 192, № 2, 255 (1970). ² А. В. Архангельский, ДАН, 187, № 5, 951 (1969). ³ А. В. Архангельский, В. И. Пономарев, ДАН, 182, № 5, 993 (1968). ⁴ Б. А. Ефимов, ДАН, 164, № 5, 967 (1965). ⁵ А. Hajnal, I. Juhász, Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet., Ser. A, 70, № 3, 343 (1967). ⁶ А. Hajnal, J. Juhász, Annales Univ. Sci., Sect. Math., XI, 1968. ⁷ М. М. Чобан, Вестн. Моск. унив., № 6, 87 (1967).