

В. К. БЕЛЬНОВ

О МЕТРИЧЕСКИХ РАСШИРЕНИЯХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 4 XI 1971)

Определение 1. Пусть X — метризуемое пространство. Метризуемое пространство Y называется метрическим расширением пространства X , если X можно топологически вложить в пространство Y в качестве всюду плотного подмножества.

1. Следующая теорема является усилением теоремы 1 из (2).

Теорема 1. Пусть X — метризуемое пространство, в котором существует замкнутое дискретное подмножество N мощности $\tau \geq \aleph_0$.

Тогда для любого метрического пространства Y с метрикой ρ , вес которого $\leq \tau$, найдется такая метрика ρ_X пространства X , что пространство Y можно изометрично вложить в нарос $\rho_X X \setminus X$ полного метрического расширения $\rho_X X^*$ пространства X .

Определение 2. Пусть X — метризуемое пространство. Определим кардинальное число $w_N(X)$, характеризующее вес наросов полных метрических расширений этого пространства следующим образом:

$w_N(X) = 0$, если X является абсолютной G_δ ;

$w_N(X) = \inf w(\rho X \setminus X)$, где символ w обозначает вес и $\inf$ берется по всем метрикам ρ пространства X .

Теорема 2. Пусть X — полное метрическое пространство веса n без изолированных точек.

Тогда для любого кардинального числа m такого, что $\aleph_0 \leq m \leq n$ или $m = 0$ существует подмножество $X_0 \leq X$ со следующими свойствами:

- 1) X_0 всюду плотно в X ;
- 2) $w(X \setminus X_0) = m$;
- 3) $w(X_0) = n$;
- 4) $w_N(X_0) = m$.

В работе (3) дается ряд необходимых и достаточных условий, чтобы метризуемое пространство имело полное метрическое расширение с наросом размерности $\leq n$. Ниже с помощью понятия π -окаймления, являющегося обобщением понятия окаймления (4), мы дадим еще одно необходимое и достаточное условие существования у метризуемого пространства полного метрического расширения с наросом размерности $\leq n$ (под размерностью везде понимается размерность $\dim$).

Определение 4. Пусть X — метризуемое пространство. Назовем π -окаймлением пространства X такую систему $\gamma = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$ открытых подмножеств пространства X , что 1) γ является локально конечным в $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ покрытием пространства $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$; 2) множество $X \setminus \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ является абсолютным G_δ .

Теорема 3. Для того чтобы метризуемое пространство имело полное метрическое расширение с наросом размерности $\leq n$, необходимо, чтобы для каждой метрики ρ пространства X , и достаточно, чтобы для некоторой метрики ρ пространства X выполнялось следующее условие: в пространстве X существует такая счетная система $\Gamma = \{\gamma_i\}$, $i = 1, 2, \dots$, π -окаймлений пространства X , что:

- 1) π -окаймление γ_{i+1} звездно вписано в π -окаймление γ_i , $i = 1, 2, \dots$;
- 2) для каждого i π -окаймление γ_i имеет кратность $\leq n + 1$;
- 3) для любого элемента $U_{\alpha, i} \in \gamma_i$, $\text{diam}_\rho U_{\alpha, i} < 1/i$.

Определение 5. Пусть Y — метризуемое пространство, точка $x \in Y$. Назовем весом пространства Y в точке x кардинальное число

* Через $\rho_X X$ обозначаем пополнение пространства X по метрике ρ_X (4).

$w_x(Y) = \inf_{Ox \ni x} w(Ox)$, где символ w обозначает вес, а $\inf$ берется по всем окрестностям Ox точки x в пространстве Y .

Теорема 4. Пусть X — метризуемое пространство, Y_0 — метрическое расширение пространства X и $N \subseteq Y_0 \setminus X$ — некоторое σ -дискретное подмножество пространства $Y_0 \setminus X$. Каждой точке $x \in N$ поставим в соответствие произвольное метрическое пространство $A_x \neq \emptyset$, удовлетворяющее условию $w(A_x) \leq w_x(Y_0)$.

Тогда существует такое метрическое расширение Y_1 пространства X , что:

1) расширение Y_1 допустимым образом * отображается на расширение Y_0 пространства X ;

2) если $f: Y_1 \rightarrow Y_0$ — допустимое отображение, то для любой точки $x \in N \subseteq Y_0 \setminus X$, $f^{-1}(x) = A_x$.

Теорема 5. Пусть X — метризуемое пространство, Y_1 — метрическое расширение пространства X и $N \subseteq Y_0 \setminus X$ — некоторое σ -дискретное подмножество пространства $Y_0 \setminus X$. Каждой точке $x \in N$ поставим в соответствие произвольный метризуемый континуум K_x .

Тогда существует такое метрическое расширение Y_2 пространства X , что:

1) расширение Y_2 допустимым образом отображается на расширение Y_0 пространства X ;

2) если $f: Y_2 \rightarrow Y_0$ — допустимое отображение, то f совершенно и для любой точки $x \in N \subseteq Y_0 \setminus X$, $f^{-1}(x) = K_x$.

II. Пусть X — фиксированное некомпактное метризуемое пространство. Рассмотрим множество $M(X)$ всех метрических расширений пространства X . Во множестве $M(X)$ естественным образом определяется частичный порядок: если $Y_1, Y_2 \in M(X)$, то $Y_1 \geq Y_2$ тогда и только тогда, когда существует допустимое отображение $f: Y_1 \rightarrow Y_2$.

Теорема 6. Пусть расширения $Y_i \in M(X)$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда для того чтобы существовало такое расширение $Y \in M(X)$, что $Y \leq Y_i$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: пусть F — замкнутое подмножество пространства X , тогда существует такая непрерывная функция f , определенная на пространстве X , что $F = \{x \in X: f(x) = 0\}$ и f продолжается на каждое расширение Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Следствие. Пусть расширения $Y_i \in M(X)$, $i = 1, 2, \dots, n$, и пусть пространство X является открытым подмножеством каждого расширения Y_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Тогда существует такое расширение $Y \in M(X)$, что $Y \leq Y_i$ для любого $i = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 7. Пусть X — некомпактное метризуемое пространство. Рассмотрим два случая.

1) Пространство X не локально компактно. Тогда существуют такие расширения $Y_1, Y_2 \in M(X)$, что для любого расширения $Y \in M(X)$ не могут одновременно выполняться неравенства $Y \leq Y_1$ и $Y \leq Y_2$.

2) Пространство X локально компактно. Тогда для любых расширений $Y_1, Y_2 \in M(X)$ существует такое расширение $Y \in M(X)$, что $Y \leq Y_1$ и $Y \leq Y_2$.

Определение 6. Пусть расширения $Y_\mu \in M(X)$, $\mu \in \Omega$. Назовем точной верхней гранью элементов Y_μ , $\mu \in \Omega$, такое расширение $Y' = \bigvee_{\mu \in \Omega} Y_\mu$, что 1') $Y' \geq Y_\mu$ для любого $\mu \in \Omega$; 2') если расширение $\bar{Y} \in M(X)$ таково, что $\bar{Y} \geq Y_\mu$ для любого $\mu \in \Omega$, то $\bar{Y} \geq Y'$. Далее назовем точной нижней гранью элементов Y_μ , $\mu \in \Omega$, такое расширение $Y'' = \bigwedge_{\mu \in \Omega} Y_\mu$, что 1'') $Y'' \leq Y_\mu$ для любого $\mu \in \Omega$; 2'') если расширение $\bar{Y} \in M(X)$ таково, что $\bar{Y} \leq Y_\mu$ для любого $\mu \in \Omega$, то $\bar{Y} \leq Y''$.

* Непрерывное отображение двух расширений пространства X называется допустимым, если оно оставляет точки X неподвижными.

Определение 7. Пусть расширения $Y_1, Y_2 \in M(X)$. Скажем, что расширения Y_1 и Y_2 принадлежат к одному классу замкнутости и будем писать $Y_1 \approx Y_2$, если существует расширение $Y \in M(X)$ такое, что $Y \geq Y_1$ и $Y \geq Y_2$ и допустимые отображения $\varphi_1: Y \rightarrow Y_1$ и $\varphi_2: Y \rightarrow Y_2$ совершенны.

Можно показать, что отношение $\approx$ на множестве $M(X)$ является отношением эквивалентности. Таким образом, всё множество $M(X)$ разбивается отношением $\approx$ на попарно непересекающиеся классы эквивалентности, которые будем называть классами замкнутости. Класс замкнутости расширения $Y \in M(X)$ будем обозначать Z_Y .

Лемма 1. Пусть расширения $Y_i \in Z_{Y_0}$, $i = 1, 2, \dots$, тогда расширение $\bigvee_{i=1}^{\infty} Y_i \in Z_{Y_0}$.

Лемма 2. Пусть для расширений $Y_\mu \in Z_{Y_0}$, $\mu \in \Omega$, существует такое расширение $Y \in Z_{Y_0}$, что $Y \leq Y_\mu$ для любого $\mu \in \Omega$.

Тогда во множестве $M(X)$ существует расширение $\tilde{Y} = \bigwedge_{\mu \in \Omega} Y_\mu$ и расширение $\tilde{Y} \in Z_{Y_0}$.

Условие $Y_\mu \in Z_{Y_0}$, $\mu \in \Omega$, здесь существенно. Можно построить пример такого пространства X и расширений $Y_1, Y_2 \in M(X)$, что существует расширение $Y \in M(X)$, для которого $Y_1, Y_2 \geq Y$ и тем не менее точная нижняя грань расширений Y_1 и Y_2 во множестве $M(X)$ не существует.

Теорема 8. Пусть расширение $Y \in Z_{Y_0}$, $w(Y \setminus X) = \tau$ и ω_λ — начальное порядковое число мощности $\max(\aleph_0, \tau)$.

Тогда существует линейно упорядоченное множество $M = \{Y_\alpha, \alpha \in R(\omega_\lambda \omega_1)\}$ метрических расширений пространства X (здесь $R(\omega_\lambda \omega_1)$ — трансфинитная прямая длины $\omega_\lambda \omega_1$, где $\omega_\lambda \omega_1$ — порядковое произведение трансфинитных чисел ω_λ и ω_1 ⁽⁵⁾) таких, что:

1) $Y_\alpha \in Z_{Y_0}$ для всех $\alpha \in R(\omega_\lambda \omega_1)$;

2) $Y_{\alpha_1} < Y_{\alpha_2}$, если $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \omega_\lambda \omega_1$, где $Y_1 = Y$;

3) $Y_\alpha = \bigvee_{1 \leq \beta < \alpha} Y_\beta$ при $1 < \alpha < \omega_\lambda \omega_1$;

4) $Y_\alpha = \bigwedge_{\beta > \alpha} Y_\beta$ при $\alpha \in R(\omega_\lambda \omega_1)$;

5) $\dim Y_\alpha = \max(\dim Y, 1)$ для любого $\alpha > 1$, $\alpha \in R(\omega_\lambda \omega_1)$.

До сих пор мы изучали структуру некоторого фиксированного класса замкнутости пространства X . Рассмотрим теперь множество $Z(X)$ всех классов замкнутости пространства X .

Определение 8. Пусть Z_{Y_1} и $Z_{Y_2} \in Z(X)$. Скажем, что $Z_{Y_1} \leq Z_{Y_2}$, если существуют такие расширения $\tilde{Y}_1 \in Z_{Y_1}$ и $\tilde{Y}_2 \in Z_{Y_2}$, что $\tilde{Y}_1 \leq \tilde{Y}_2$.

Можно показать, что отношение $\geq$ является отношением частичного порядка на множестве $Z(X)$, т. е. это отношение обладает свойствами рефлексивности, антисимметричности и транзитивности.

Теорема 9. Пусть X — некомпактное метризуемое пространство веса τ . Рассмотрим два случая.

1) В пространстве X существует замкнутое дискретное подмножество мощности τ . Тогда $|M(X)| = |Z(X)| = \exp(\tau^{\aleph_0})$ (здесь символ $|\cdot|$ обозначает мощность), причем существует $\exp(\tau^{\aleph_0})$ попарно несравнимых классов замкнутости пространства X .

2) Мощность любого замкнутого дискретного подмножества пространства X меньше τ . В этом случае $\tau = \sum_{i=1}^{\infty} \tau_i$, где $\aleph_0 < \tau_1 < \dots < \tau_i < \dots < \tau$ и имеют место неравенства

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i^{\aleph_0}\right) \leq |Z(X)| \leq |M(X)| \leq \exp(\tau^{\aleph_0}),$$

* Как показано в ⁽¹⁾, для любого счетного числа расширений $Y_i \in M(X)$ всегда существует расширение $\bigvee_{i=1}^{\infty} Y_i$.

причем существует $\exp \left(\sum_{i=1}^{\infty} \tau_i^{n_i} \right)$ попарно не сравнимых классов замкнутости пространства X .

Пусть далее $M_p(X)$ — подмножество множества $M(X)$, состоящее из всех полных метрических расширений пространства X , и $Z_p(X)$ — подмножество множества $Z(X)$, элементами которого являются все классы замкнутости, содержащие полные метрические расширения пространства X . Тогда в обоих рассмотренных выше случаях $|M_p(X)| = |Z_p(X)| = \exp \tau$ и существует $\exp \tau$ попарно несравнимых классов замкнутости полных метрических расширений пространства X .

III. Пусть X — фиксированное некомпактное метризуемое пространство. Рассмотрим банахову алгебру R^X всех непрерывных ограниченных функций, определенных на пространстве X с нормой $\|f\| = \sup_X |f(x)|$, $f \in R^X$.

Пусть далее Y — метрическое расширение пространства X и $\Phi_Y: R^Y \rightarrow R^X$ — отображение, определенное формулой $\Phi_Y(f) = f|_X$, $f \in R^Y$. Нетрудно проверить, что отображение Φ_Y является изометрическим вложением алгебры R^Y в алгебру R^X . Пусть $R_Y = \Phi_Y(R^Y)$.

Теорема 10. Пусть функция $f \in R = \bigcap_{Y \in M(X)} R_Y$.

Тогда возможны три случая.

1) Отображение $f: X \rightarrow R^1$ постоянно, т. е. $f(x) = a$ для любой точки $x \in X$.

2) Пространство X можно представить в виде $X = X_1 \cup X_2$, где $X_1, X_2 \neq \emptyset$, $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, X_1 — локально компактное сепарабельное открытое подмножество пространства X , причем отображение $f|_{X_1}: X_1 \rightarrow f(X_1)$ совершенно, отображение $f|_{X_2}: X_2 \rightarrow R^1$ постоянно и множество $f(X)$ является компактом.

3) Пространство X локально компактно и сепарабельно, отображение $f: X \rightarrow f(X)$ совершенно, и множество $[f(X)]_{R^1} \setminus f(X)$ состоит из одной точки.

Обратно, если функция $f \in R^X$ удовлетворяет условиям одного из пунктов 1)–3), то $f \in R = \bigcap_{Y \in M(X)} R_Y$.

Теорема 11. Соответствие между метрическими расширениями пространства X и подалгебрами R_Y алгебры R^X является взаимно однозначным, т. е. различным расширениям пространства X соответствуют различные подалгебры R_Y алгебры R^X . Далее, если расширения $Y_1, Y_2 \in M(X)$, то включение $R_{Y_1} \subseteq R_{Y_2}$ выполняется тогда и только тогда, когда $Y_1 \subseteq Y_2$.

Следствие. Пусть расширения Y_1 и $Y_2 \in M(X)$, тогда неравенство $Y_1 \subseteq Y_2$ выполняется в том и только в том случае, если для бикомпактных расширений βY_1 и βY_2 пространства X справедливо неравенство $\beta Y_1 \subseteq \beta Y_2$. (Здесь βY — максимальное бикомпактное расширение пространства Y .)

Теорема 12. Пусть расширения $Y_\mu \in M(X)$, $\mu \in \Omega$.

Тогда расширение $Y \in M(X)$ в том и только в том случае является точной нижней гранью расширений Y_μ , $\mu \in \Omega$, если $R_Y = \bigcap_{\mu \in \Omega} R_{Y_\mu}$.

Лемма 3. Пусть Y_0 — метрическое расширение пространства X , тогда имеет место равенство $R^X = \bigcup_{Y \in Z_{Y_0}} R_Y$.

Следствие. Пусть Y_0 — метрическое расширение пространства X , тогда имеет место равенство $\beta X = \sup_{Y \in Z_{Y_0}} \beta Y$.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
3 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. К. Бельнов, Вестн. Московск. ун-ва, математика, механика, 4, 60 (1970).
² В. К. Бельнов, Вестн. Московск. ун-ва, математика, механика, 5, 7 (1970).
³ J. M. Aarts, Fund. Math., 63, № 1, 27 (1968). ⁴ Ю. М. Смирнов, ДАН, 168, № 3, 528 (1966). ⁵ Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1934.