Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 5

УДК 517.512.7 МАТЕМАТИКА

С. В. БОЧКАРЕВ

ОБ АБСОЛЮТНОЙ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ФУРЬЕ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 13 VII 1971)

1. С. Н. Бернштейн (см. ([1]), стр. 384) установил, что если $f \in \operatorname{Lip} \alpha$ при некотором $\alpha > 1/2$, то тригонометрический ряд Фурье от f

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

абсолютно сходится при всех x и

$$\sum |a_n| + |b_n| < \infty.$$

При $\alpha = 1/2$ этот результат теряет силу.

Последнее утверждение, как показал Б. И. Голубев ([2]), остается справедливым и для системы Хаара. Более того, Б. С. Митягин ([3]) (случай $\alpha = 1/2$) и автор ([4]) (случай произвольного $\alpha \in (0, 1)$) доказали, что для всякого числа $\alpha \in (0, 1)$ и любой полной в $L_2(0, 1)$ ортонормированной системы функций $\{\varphi_n\}$ найдется функция $f \in \operatorname{Lip} \alpha$ такая, что

$$\sum |a_n(f)|^\beta = \infty, \quad \beta = \frac{2}{2\alpha + 1}, \quad a_n(f) = (f, \varphi_n).$$

С другой стороны, П. Л. Ульянов ([5]) установил, что если модуль непрерывности $w(\delta, f) = O\left\{\frac{1}{(\log 1/\delta)^{1/2+\varepsilon}}\right\}$ при некотором $\varepsilon > 0$, то ряд Фурье — Хаара

$$\sum (f, \chi_n) \cdot \chi_n(t) \tag{1}$$

абсолютно сходится для почти всех $t \in (0, 1)$. Нами было показано ([6]), что это утверждение теряет силу при $\varepsilon = 0$, т. е. найдется функция $f \in C(0, 1)$ с $w(\delta, f) = \left\{\frac{1}{(\log 1/\delta)^{1/2}}\right\}$, для которой ряд (1) не сходится в почти каждой точке $t \in (0, 1)$.

В связи с приведенными результатами возник вопрос, не переносится ли последнее утверждение на произвольные полные ортонормированные системы. Точнее, существует ли такой модуль непрерывности $\omega(\delta)$ (в частности, не является ли таковым $\omega(\delta) = \frac{1}{\sqrt{\log 1/\delta}}$), что для всякой ортонормированной полной системы $\{\varphi_n\}$ найдется функция $f \in H^\omega$ (через H^ω обозначается класс непрерывных функций f, модуль непрерывности которых $w(\delta, f) = O\{\omega(\delta)\}$) такая, что

$$\sum |a_n(f) \cdot \varphi_n(t)| = \infty$$

при $t \in E$, где E — множество полной или положительной меры.

В настоящей работе устанавливается, что общего в указанном смысле класса H^ω для всех полных ортонормированных систем не существует. А именно, справедлива

Теорема 1. *Для любого класса H^ω существует полная в $L(0,1)$ ортонормированная система функций $\{\varphi_n(t)\}$ такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)\cdot\varphi_n(t)| < \infty, \quad a_n(f) = (f, \varphi_n),$$

при почти всех $t \in (0,1)$ для всякой функции $f \in H^\omega$.

Вместе с тем, согласно теореме А. М. Олевского ([7]), для любой полной в $L_2(0, 1)$ ортонормированной системы функций $\{\varphi_n(t)\}$ существует непрерывная функция $f(t)$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)\cdot\varphi_n(t)| = \infty$$

при почти всех $t \in [0,1]$.

2. Для абсолютной сходимости рядов Фурье по полным ортонормированным системам функций, ограниченным в совокупности, справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — полная в $L_2(0,1)$ ортонормированная система функций такая, что*

$$|\varphi_n(t)| \leqslant M, \tag{2}$$

для некоторого числа $M > 0$ при всех $t \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \ldots$

Тогда существует множество E второй категории в $[0,1]$ такое, что при всех $x \in E$ выполняется соотношение

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(h_x)| = \infty,$$

где $h_x(t)$ — характеристическая функция интервала $(0, x)$, и $a_n(h_x) = (h_x, \varphi_n)$.

Система Уолша показывает, что в утверждении теоремы 2 множество E нельзя заменить на весь отрезок $[0, 1]$.

Отметим, что из теоремы 2 вытекает известный факт неограниченности констант Лебега для системы Уолша.

Известно, что для тригонометрической системы существует абсолютно непрерывная функция, ряд Фурье которой не сходится абсолютно (см. ([1]), стр. 385). Подобное утверждение верно для произвольных полных ограниченных в совокупности ортонормированных систем.

Теорема 3. *Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — полная в $L_2(0,1)$ ортонормированная система функций, удовлетворяющая условию (2).*

Тогда найдется абсолютно непрерывная функция $f(t)$ такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| = \infty, \quad a_n(f) = (f, \varphi_n).$$

Для тригонометрической системы Сас доказал (см. ([1]), стр. 387), что если функция f имеет ограниченное изменение и если $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, то

$$\sum |a_n(f)|^\beta + |b_n(f)|^\beta < \infty$$

при $\beta > 2/(2+\alpha)$, но необязательно при $\beta = 2/(2+\alpha)$, где $a_n(f)$ и $b_n(f)$ — тригонометрические коэффициенты Фурье функции f.

Нами установлено, что для произвольных полных ограниченных в совокупности систем справедлива

Теорема 4. *Пусть $\{\varphi_n(t)\}$ — ортонормированная полная в $L_2(0,1)$ система функций, удовлетворяющая условию (2).*

Тогда для любого $\alpha \in (0, 1]$ *найдется функция* f *ограниченной вариации,* $f \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, *такая, что*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)|^{\beta} = \infty, \quad a_n(f) = (f, \varphi_n),$$

при всех $\beta < 2/(2+\alpha)$.

Отметим, что теоремы 2, 3 и 4 теряют силу, если система $\{\varphi_n(t)\}$ неограничена в совокупности или не полна.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, **1**, М., 1965. [2] Б. И. Голубов, Изв. АН СССР, сер. матем., **28**, 1271 (1964). [3] Б. С. Митягин, ДАН, 157, № 5, 1047 (1964). [4] С. В. Бочкарев, Матем. заметки, **7**, в. 4, 397 (1960). [5] П. Л. Ульянов, Матем. заметки, **1**, № 1, 17 (1967). [6] С. В. Бочкарев, Матем. заметки, **4**, № 2, 211 (1968). [7] А. М. Олевский, Изв. АН СССР, сер. матем., **27**, 343 (1963).