

Е. В. ВЕНИЦИАНОВ

УСРЕДНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ВОЛН С ДИСПЕРСИЕЙ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 2 VII 1971)

В области нелинейных волновых процессов с дисперсией в консервативных системах разработан ⁽¹⁾ метод «адиабатического приближения» для получения асимптотических решений, основанный на локальной близости процесса к стационарной бегущей волне, а также предложен ⁽²⁾ способ получения дисперсионной системы, управляющей изменением огибающих (амплитуды a , частоты ω , волнового числа k) квазистационарной волны, из вариационного принципа, примененного к соответствующим образом усредненному лагранжиану. Такого рода усреднения вариационных уравнений, представляющие интегрирование по части независимых переменных, уже давно и широко применялись в теории стержней, оболочек, в гидравлике при использовании метода Бубнова.

Рассмотрим для простоты одно обобщенное уравнение типа уравнения Эйлера для неконсервативной системы

$$T(u) = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial u_t} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial L}{\partial u_x} \right) + \frac{\partial L}{\partial u} + Q(u) = 0, \quad (1)$$

следующее из вариационного уравнения ⁽³⁾

$$\delta \int_{V_0} L(u, u_t, u_x) dx dt + \delta W^* = 0, \quad (2)$$

где δW^* — неголономная вариация функционала вида

$$\delta W^* = \int_{V_0} Q(u)(u, u_t, u_x, \varepsilon) \delta u dx dt, \quad Q(u) = Q^{(0)}(u) + \varepsilon Q^{(1)}(u) + \dots \quad (3)$$

(ε — малый положительный параметр).

Введение δW^* неединственно, поскольку всегда часть L можно перевести в δW^* или обратно.

Допустим, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (1) допускает решение в виде бегущей стационарной волны с постоянными параметрами

$$u = U^{(0)}(a, \theta, k_0, \omega_0), \quad \theta = k_0 x - \omega_0 t.$$

Применение асимптотического представления квазистационарной волны в виде ^(4, 6)

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=0} \varepsilon^m U^{(m)}(a, \theta, \dots), \\ a_t &= \sum_{m=0} \varepsilon^{m+1} A^{(m+1)}(\varepsilon x, \varepsilon t), \quad a_x = \sum_{m=0} \varepsilon^{m+1} B^{(m+1)}(\varepsilon x, \varepsilon t), \\ \theta_t \equiv -\omega &= -\sum_{m=0} \varepsilon^m \omega^{(m)}(\varepsilon x, \varepsilon t), \quad \theta_x \equiv k = \sum_{m=0} \varepsilon^m k^{(m)}(\varepsilon x, \varepsilon t), \end{aligned} \quad (4)$$

позволяет получить дисперсионную систему при любых степенях ε . Эта же система может быть получена из вариационного уравнения в усредненной форме ⁽⁴⁾. В частности, в первом после стационарного «адиабатическом» приближении усредненный лагранжиан и усредненная неголомонная вариация δW^* вводятся в виде

$$\mathcal{L}(a, \omega, k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L(U^{(0)}, -\omega U_\theta^{(0)}, k U_a^{(0)}) d\theta, \quad (5a)$$

$$\delta \tilde{W}^* = \int_{V_0} [Q_{(\theta)} \delta \theta + Q_{(a)} \delta a] dx dt, \quad (5b)$$

$$Q_\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{(\theta)} U_\theta^{(0)} d\theta, \quad Q_{(a)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Q_{(a)} U_a^{(0)} d\theta$$

(здесь $U_\theta^{(0)}$, $U_a^{(0)}$ — частные производные по явно входящим θ и a). Замыкает систему уравнений Эйлера для (5a), (5b) уравнение

$$\omega_x + k_t = 0.$$

Дисперсионная система получается одной и той же при любом способе задания δW^* . Например, если вариационное уравнение (2) записать в виде $\delta W^* = 0$, то уравнение Эйлера при $\delta \theta$ примет вид

$$\int_0^{2\pi} T(U^{(0)}) U_\theta^{(0)} d\theta = 0. \quad (6)$$

Имея в виду, что a , ω , k зависят от x и t (см. (4)), интегрированием по частям (6) можно представить как

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right) + Q_{(\theta)} = 0,$$

что совпадает с уравнением Эйлера, следующим из (5a), (5b). Таким образом, при построении усредненного вариационного уравнения не имеет значения, как происходит формирование L и δW^* .

Учет нелинейности в исходном уравнении (1) приводит к качественно новым свойствам дисперсионной системы, например, к возможности существования скачков, т. е., узких зон быстрого изменения волновых параметров a , ω , k ⁽⁵⁾.

Однако прямое усреднение L по точному стационарному решению приводит к весьма сложным системам. Поэтому усреднение можно проводить по функциям, аппроксимирующим $U^{(0)}$ с достаточной точностью:

$$\varphi = \varphi(a_k, \theta)$$

где a_k — параметры, зависящие от a , $\omega^{(0)}$, $k^{(0)}$. В этом случае

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(a_k, \omega, k)$$

и в качестве варьируемых функций берутся a_k , θ . Эта процедура соответствует методу Рунта при прямом решении вариационных задач и является вариантом метода Бубнова. Например, в случае малых, но конечных амплитуд, когда существенны нелинейные эффекты, $U^{(0)}$ аппроксимируется отрезком тригонометрического ряда

$$\varphi(a_n, b_n, \theta) = \sum_0^N a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

Дисперсионные соотношения между a_n , b_n , $\omega^{(0)}$, $k^{(0)}$, очевидно, находятся из системы

$$\int_0^{2\pi} T(\varphi) \cos n\theta d\theta = 0, \quad \int_0^{2\pi} T(\varphi) \sin n\theta d\theta = 0,$$

которая совпадает с уравнениями Эйлера при δa_k и δb_k , если L и δW^* (5а), (5б) усреднить по φ .

Число членов N выбирается из вида уравнения (1) и потребной точности. Например, для уравнения Клейна — Гордона, у которого

$$L = \frac{u_t^2}{2} - \frac{u_x^2}{2} - \left[\frac{u^2}{2} + \frac{c^{(1)}u^3}{3} + \dots + \frac{c^{(m-1)}u^{m+1}}{m+1} \right],$$

в качестве φ следует взять

$$a_0^{(m)} + a \cos \theta + \dots + a_m^{(m)} \cos m\theta,$$

если выбрана точность a^m , где a — амплитуда основной гармоники. Дисперсионная система в этом случае гиперболического типа и при $m > 2$ допускает решения типа скачков.

Когда u является вектором $(u_1, \dots, u_n)$, возможно обобщение указанного формализма для тех типов лагранжианов, которые допускают периодические решения уравнений (1). При интегрировании получим n решений, зависящих от θ , $a_1, \dots, a_s$ ($s \leq 2n$). Уравнения в вариациях для функций $U^{(1)}, \dots$ представляют систему линейных неоднородных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Согласно теореме Флоке соответствующая однородная система имеет $2n$ частных линейно независимых решений вида

$$w(\theta) = P(\theta) \cdot \exp [B\theta] \cdot C,$$

где $P(\theta)$ — периодическая матрица ($2n \times 2n$), B — постоянная матрица ($2n \times 2n$), C — вектор начальных значений ($2n \times 1$). Среди этих решений имеются $U_\theta^{(0)}, U_{a_s}^{(0)}, \dots, U_{a_s}^{(0)}$. Из условий периодичности $U^{(1)}, \dots$ находим $2n$ условий типа (6), из них s уравнений составляют дисперсионную систему, которая совпадает с системой уравнений при $\delta\theta$ и δa_i ($i = 2, \dots, s$) для вариационного уравнения в усредненной форме. Остальные $2n - s$ условий должны удовлетворяться тождественно (матрица B должна иметь специальный вид: характеристические показатели λ_i должны иметь $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$, $\operatorname{Im} \lambda_i \neq 0, 1, \dots$; см. (6, 7)). Поэтому при усреднении лагранжиана аппроксимирующие функции $U^{(0)}(\theta)$ следует брать зависящими от s постоянных $a_1, \dots, a_s$.

Автор выражает глубокую благодарность акад. Л. И. Седову за внимание и помощь в работе.

Институт геохимии и аналитической химии
им. В. И. Вернадского
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. A, **283**, 238 (1965). ² G. B. Whitham, J. Fluid. Mech., **22**, 273 (1965). ³ Л. И. Седов, УМН, **20**, в. 5 (1965). ⁴ Е. В. Веницианов, ДАН, **198**, № 3, 551 (1971). ⁵ G. B. Whitham, Proc. Roy. Soc. A., **299**, 1 (1967). ⁶ А. А. Островский, Е. Н. Пелиповский, ДАН, **195**, 804 (1970). ⁷ Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний, «Наука», 1964.