

4. Гришечкин Ю. А. Приближенное аналитическое решение одномерного квазипотенциального уравнения с потенциалом $(\rho^2 + \rho_0^2)^{-1}$ в релятивистском конфигурационном представлении / Ю. А. Гришечкин, А. В. Бужан, В. Н. Капшай // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 3 (56). – С. 12–15.

С. А. Лукашевич, Н. В. Максименко, О. М. Дерюжкова

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь

КВАНТОВО-ПОЛЕВОЙ ПОДХОД ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯРИЗУЕМОСТЕЙ НУКЛОНА

Для определения поляризуемостей нуклона в рамках кванто-полевого подхода с учетом принципа соответствия между классической и квантовой теориями воспользуемся эффективным ковариантным лагранжианом, описывающим взаимодействие электромагнитного поля с частицами спина $\frac{1}{2}$, представленным в работе [1]. На его основе и с использованием уравнений Эйлера–Лагранжа получим уравнения, позволяющие учесть вклад поляризуемостей и дипольных моментов нуклона.

Эффективный лагранжиан, описывающий взаимодействие электромагнитного поля с нуклоном с учетом аномальных магнитных моментов и поляризуемостей, имеет вид [1]:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\Psi} \left(i \hat{D} - m \right) \Psi - \frac{1}{2} \bar{\Psi} \left(i \hat{D} + m \right) \Psi. \quad (1)$$

В уравнение (1) введены следующие обозначения:

$$\hat{D} = \bar{\partial}^\nu \gamma^\sigma \eta_{\sigma\nu} - \frac{ie\kappa}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - ie \hat{A}, \quad (2)$$

$$\hat{D} = \eta_{\sigma\nu} \gamma^\sigma \bar{\partial}^\nu + \frac{ie\kappa}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + ie \hat{A}, \quad (3)$$

$$\eta_{\sigma\nu} = g_{\sigma\nu} + \frac{2\pi}{m} \left[\alpha F_{\sigma\mu} F^\mu{}_\nu + \beta \tilde{F}_{\sigma\mu} \tilde{F}^\mu{}_\nu \right]. \quad (4)$$

После подстановки формул (2) – (4) в уравнение (1), выражение для эффективного лагранжиана примет вид:

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\Psi} \hat{\partial} \Psi - m \bar{\Psi} \Psi - e \bar{\Psi} \hat{A} \Psi - \frac{e\kappa}{2m} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi F_{\mu\nu} + K_{\sigma\nu} \theta^{\sigma\nu}, \quad (5)$$

$$K_{\sigma\nu} = \frac{2\pi}{m} \left[\alpha F_{\sigma\mu} F^\mu{}_\nu + \beta \tilde{F}_{\sigma\mu} \tilde{F}^\mu{}_\nu \right], \quad \theta^{\sigma\nu} = \frac{i}{2} \bar{\Psi} \gamma^\sigma \bar{\partial}^\nu \Psi, \quad \bar{\partial}^\nu = \bar{\partial}^\nu - \tilde{\partial}^\nu.$$

Выделим в лагранжиане (5) слагаемые, связанные с поляризуемостью нуклона:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu],$$

$$L^{(\alpha,\beta)} = -\frac{2\pi}{m} [\alpha F_{\mu\sigma} F^{\mu\nu} + \beta \tilde{F}_{\mu\sigma} \tilde{F}^{\mu\nu}] \theta^{\sigma\nu}, \quad (6)$$

$$\tilde{F}_{\mu\sigma} \tilde{F}^{\mu\nu} = F_{\mu\sigma} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \delta^\nu_\sigma F_{\mu\rho} F^{\mu\rho},$$

$$L^{(\alpha,\beta)} = -\frac{2\pi}{m} \left[(\alpha + \beta) F_{\mu\sigma} F^{\mu\nu} \theta^\sigma_\nu - \frac{\beta}{2} \theta^\sigma_\sigma F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right]. \quad (7)$$

Выражение для лагранжиана (7) согласуется с эффективным лагранжианом, представленным в работе [2]. Формула (7) представляет собой релятивистское квантово-полевое обобщение нерелятивистского соотношения

$$H = -L^{(\alpha,\beta)} = -2\pi (\alpha \vec{E}^2 + \beta \vec{H}^2),$$

что соответствует поляризуемости индуцированных дипольных моментов в постоянном электромагнитном поле [3].

Для получения уравнений взаимодействия электромагнитного поля с нуклонами воспользуемся эффективным лагранжианом (1) и уравнениями Эйлера–Лагранжа:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial L}{\partial A_\nu} = 0, \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \bar{\Psi})} \right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{\Psi}} = 0, \quad \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Psi)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Psi} = 0.$$

Вычисляя ковариантные производные, получим следующие уравнения:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e \bar{\Psi} \gamma^\nu \Psi - \partial_\mu \left[\frac{e\kappa}{2m} \bar{\Psi} \sigma^{\mu\nu} \Psi + G^{\mu\nu} \right], \quad (8)$$

$$\left(i \hat{\partial} - m \right) \Psi = e \hat{A} \Psi - \frac{i}{2} \left[\partial^\nu (K_{\sigma\nu} \gamma^\sigma \Psi) + K_{\sigma\nu} \gamma^\sigma \partial^\nu \Psi \right] + \frac{e\kappa}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \Psi, \quad (9)$$

$$\bar{\Psi} \left(i \hat{\partial} + m \right) = -\bar{\Psi} e \hat{A} - \frac{i}{2} \left[\partial^\nu (\bar{\Psi} \gamma^\sigma K_{\sigma\nu}) + (\partial^\nu \bar{\Psi}) \gamma^\sigma K_{\sigma\nu} \right] - \bar{\Psi} \frac{e\kappa}{4m} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (10)$$

В уравнениях (9) и (10) ограничимся членами второго порядка по частоте излучения, поэтому их можно представить стандартным образом как

$$\left(i \hat{\bar{D}} - m \right) \Psi = 0, \quad \bar{\Psi} \left(i \hat{D} + m \right) = 0,$$

где $\hat{\bar{D}}$ и $\hat{D}$ определяются из (2) и (3). Антисимметричный тензор $G^{\mu\nu}$ из формулы (8) имеет вид:

$$G^{\mu\nu} = -\frac{\partial L^{(\alpha,\beta)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{4\pi}{m} \left[(\alpha + \beta) (F^\mu{}_\rho \tilde{\theta}^{\rho\nu} - F^\nu{}_\rho \tilde{\theta}^{\rho\mu}) - \beta \theta^\rho F^{\mu\nu} \right], \quad (11)$$

где

$$\tilde{\theta}^{\rho\nu} = \frac{1}{2} (\theta^{\rho\nu} + \theta^{\nu\rho}).$$

С использованием антисимметричного тензора (11) эффективный лагранжиан (7) может быть представлен как:

$$L^{(\alpha,\beta)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} G^{\mu\nu}.$$

Если в уравнениях (9) и (10) ограничиться только вкладом электрического заряда и магнитного момента, то можно получить хорошо известные уравнения, представленные в работе [4].

Чтобы определить физический смысл тензора $G^{\mu\nu}$ воспользуемся разложением Гордона [5]. Плотность тока частиц Дирака j^μ с помощью разложения Гордона можно представить следующим образом:

$$j^\mu = e \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi = \frac{e}{2m} \bar{\Psi} i \tilde{\partial}^\mu \Psi - \partial_\nu \left[\frac{e}{2m} \bar{\Psi} \sigma^{\nu\mu} \Psi \right],$$

где

$$G_0^{\nu\mu} = \frac{e}{2m} \bar{\Psi} \sigma^{\nu\mu} \Psi, \quad j_e^\mu = \frac{e}{2m} \bar{\Psi} i \tilde{\partial}^\mu \Psi.$$

Компонентами тензора $G_0^{\nu\mu}$, который называется антисимметричным дипольным тензором, являются статические дипольные моменты точечных частиц. С помощью этого тензора можно определить ток:

$$j_m^\mu = -\partial_\nu G_0^{\nu\mu}.$$

В системе покоя частицы имеем следующие соотношения:

$$m_0^i = \frac{i}{2} \varepsilon^{ijk} G_{0jk}, \quad d_0^i = G^{i0}.$$

Компоненты четырехмерного тока можно определить через дипольные моменты:

$$\rho_0 = -(\vec{\partial} \vec{d}_0), \quad \vec{j}_0 = \partial_t \vec{d}_0 + [\vec{\partial} \vec{m}_0].$$

Лагранжиан, описывающий взаимодействие электромагнитного поля с заряженной частицей со статическим дипольным моментом, имеет вид:

$$L_I = -j_e^\mu A_\mu - \frac{1}{2} G_0^{\nu\mu} F_{\nu\mu}. \quad (12)$$

Используя выражение (12), лагранжиан $L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, уравнения Эйлера–Лагранжа, получим уравнение (8) в виде:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j_e^\mu - \partial_\nu G_0^{\nu\mu}.$$

В релятивистской электродинамике вводится аналогичный тензор с индуцированными дипольными моментами [6]. Плотность тока и моменты выражаются через $G^{\mu\nu}$ следующим образом:

$$j^\mu = -\partial_\nu G^{\nu\mu}, \quad d^\mu = G^{\mu\nu} U_\nu, \quad m^\mu = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} G_{\nu\rho} U_\sigma. \quad (13)$$

Соотношения (13) удовлетворяют тензорной форме:

$$G^{\mu\nu} = (d^\mu U^\nu - U^\mu d^\nu) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} m_\rho U_\sigma.$$

Для перехода к квантовому описанию структурных частиц с индуцированными дипольными моментами воспользуемся операторной формой [7]:

$$\hat{G}^{\mu\nu} = -\frac{i}{2m} \left[\left(\hat{d}^\mu \bar{\partial}^\nu - \hat{d}^\nu \bar{\partial}^\mu \right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \hat{m}_\rho \bar{\partial}_\sigma \right],$$

$$\hat{G}^{\mu\nu} = \frac{i}{2m} \left[\left(\bar{\partial}^\nu \hat{d}^\mu - \bar{\partial}^\mu \hat{d}^\nu \right) + \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\partial}_\sigma \hat{m}_\rho \right],$$

где $\hat{d}^\mu$ и $\hat{m}^\mu$ – операторы индуцированных дипольных моментов, зависящих от тензора электромагнитного поля.

Если требуется, чтобы выполнялась низкоэнергетическая теорема для комптоновского рассеяния, то эти операторы можно определить через электрическую α и магнитную β поляризуемости нуклона:

$$\hat{d}^\mu = 4\pi\alpha F^{\mu\nu} \gamma_\nu, \quad \hat{m}^\mu = 4\pi\beta \tilde{F}^{\mu\nu} \gamma_\nu.$$

Следовательно, выражение (11) представляет собой антисимметричный тензор индуцированных дипольных моментов нуклона. В этом случае лагранжиан взаимодействия определяется следующим образом:

$$L_I = -j_e^\mu A_\mu - \frac{1}{2} G_0^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} G^{\mu\nu} F_{\mu\nu},$$

откуда следует уравнение Максвелла в виде:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = j_e^\mu - \partial_\nu G_0^{\nu\mu} - \partial_\nu G^{\nu\mu}.$$

Таким образом, ковариантные уравнения, описывающие взаимодействие электромагнитного поля с нуклоном с учетом поляризуемостей и дипольных моментов построены. Преимуществом данного метода определения поляризуемости является его относительная простота. Такой подход дает широкие возможности для изучения внутренней электромагнитной структуры нуклонов и может применяться в различных квантово-полевых моделях.

Литература

1. Максименко, Н. В. Феноменологическое описание поляризуемости элементарных частиц в полевой теории / Н. В. Максименко, Л. Г. Мороз // Сборник трудов 11 Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике, Дубна / Д2-11707. – Дубна, 1979. – С. 533–543.
2. L'vov, A. I. Theoretical aspects of the polarizability of the nucleon / A. I. L'vov // Inter. Journ. Mod. Phys. A. – 1993. – Vol. 8, № 30. – P. 5267–5303.
3. Schumacher, M. Dispersion theory of nucleon Compton scattering and polarizabilities / M. Schumacher // [Electronic resource]. – 2013. – Mode of access: <http://hep-ph/1301.1567>. – Date of access: 01.11.2024.
4. Бьеркен, Дж. Д. Релятивистская квантовая теория: В 2-х т. / Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл; Пер. с англ. Б. О. Кербилова; Под ред. В. Б. Берестецкого. Т. 1. – М.: Наука, 1978. – 295 с.
5. Ициксон, К. Квантовая теория поля: В 2-х т. / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер; Пер. с англ. под ред. Р. М. Мир-Касимова. Т. 2. – М.: Мир, 1984. – 400 с.
6. Де Гроот, С.Р. Электродинамика / С. Р. Де Гроот, Л. Г. Сатторп; Перевод с англ. А. Р. Казаряна, А. М. Курбатова; Под ред. Н. Н. Богомолова. – М.: Наука, 1982. – 560 с.
7. Максименко, Н. В. Ковариантный калибровочно-инвариантный формализм Лагранжа с учетом поляризуемостей частиц / Н. В. Максименко, О. М. Дерюжкова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 2. – С. 27–30.

А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь

РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО АНАЛОГА ПОТЕНЦИАЛА «ДЕЛЬТА-ОКРУЖНОСТЬ»

Введение. Двумерное интегральное уравнение Логунова-Тавхелидзе в импульсном представлении для парциальной волновой функции $\psi_\mu(p)$, описывающее связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы m , имеет вид [1]

$$\psi_\mu(p) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{E^2 - E_p^2} \int_0^\infty \sqrt{k} V_\mu(p, k) \frac{m}{E_k} \psi_\mu(k) dk, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

где p – модуль вектора относительного импульса;
 $2E$ – энергия двухчастичной системы ($0 < 2E < 2m$);
 $V_\mu(p, k)$ – парциальный потенциал;
 $E_k = \sqrt{m^2 + k^2}$ и $E_p = \sqrt{m^2 + p^2}$.