

Таким образом, ковариантные уравнения, описывающие взаимодействие электромагнитного поля с нуклоном с учетом поляризуемостей и дипольных моментов построены. Преимуществом данного метода определения поляризуемости является его относительная простота. Такой подход дает широкие возможности для изучения внутренней электромагнитной структуры нуклонов и может применяться в различных квантово-полевых моделях.

Литература

1. Максименко, Н. В. Феноменологическое описание поляризуемости элементарных частиц в полевой теории / Н. В. Максименко, Л. Г. Мороз // Сборник трудов 11 Международной школы молодых ученых по физике высоких энергий и релятивистской ядерной физике, Дубна / Д2-11707. – Дубна, 1979. – С. 533–543.
2. L'vov, A. I. Theoretical aspects of the polarizability of the nucleon / A. I. L'vov // Inter. Journ. Mod. Phys. A. – 1993. – Vol. 8, № 30. – P. 5267–5303.
3. Schumacher, M. Dispersion theory of nucleon Compton scattering and polarizabilities / M. Schumacher // [Electronic resource]. – 2013. – Mode of access: <http://hep-ph/1301.1567>. – Date of access: 01.11.2024.
4. Бьеркен, Дж. Д. Релятивистская квантовая теория: В 2-х т. / Дж. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл; Пер. с англ. Б. О. Кербилова; Под ред. В. Б. Берестецкого. Т. 1. – М.: Наука, 1978. – 295 с.
5. Ициксон, К. Квантовая теория поля: В 2-х т. / К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер; Пер. с англ. под ред. Р. М. Мир-Касимова. Т. 2. – М.: Мир, 1984. – 400 с.
6. Де Гроот, С.Р. Электродинамика / С. Р. Де Гроот, Л. Г. Сатторп; Перевод с англ. А. Р. Казаряна, А. М. Курбатова; Под ред. Н. Н. Богомолова. – М.: Наука, 1982. – 560 с.
7. Максименко, Н. В. Ковариантный калибровочно-инвариантный формализм Лагранжа с учетом поляризуемостей частиц / Н. В. Максименко, О. М. Дерюжкова // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2011. – № 2. – С. 27–30.

А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь

РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ РЕЛЯТИВИСТСКОГО АНАЛОГА ПОТЕНЦИАЛА «ДЕЛЬТА-ОКРУЖНОСТЬ»

Введение. Двумерное интегральное уравнение Логунова-Тавхелидзе в импульсном представлении для парциальной волновой функции $\psi_\mu(p)$, описывающее связанные состояния системы двух скалярных частиц одинаковой массы m , имеет вид [1]

$$\psi_\mu(p) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{E^2 - E_p^2} \int_0^\infty \sqrt{k} V_\mu(p, k) \frac{m}{E_k} \psi_\mu(k) dk, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1)$$

где p – модуль вектора относительного импульса;
 $2E$ – энергия двухчастичной системы ($0 < 2E < 2m$);
 $V_\mu(p, k)$ – парциальный потенциал;
 $E_k = \sqrt{m^2 + k^2}$ и $E_p = \sqrt{m^2 + p^2}$.

Парциальный потенциал в импульсном представлении связан с потенциалом в координатном представлении $V(\rho)$ следующим интегральным соотношением:

$$V_{\mu}(p, k) = 2\pi \int_0^{\infty} \rho J_{\mu}(p\rho) V(\rho) J_{\mu}(k\rho) d\rho, \quad (2)$$

где ρ – модуль радиус-вектора в двумерном координатном представлении;

$J_{\mu}(p\rho)$ – функция Бесселя [2]. Рассмотрим потенциал «дельта-окружность» радиуса a в координатном представлении:

$$V(\rho) = -\lambda \delta(\rho - a), \quad (3)$$

где $\lambda > 0$, $a > 0$ – константы. Подставив потенциал (3) в формулу (2) и выполнив интегрирование, получим выражение для парциального потенциала в импульсном представлении:

$$V_{\mu}(p, k) = -2\pi \lambda a J_{\mu}(pa) J_{\mu}(ka). \quad (4)$$

Рассмотрим релятивистский аналог потенциала (4), параметрически зависящий от энергии:

$$V_{\mu}(p, k) = -2\pi \lambda a \left(E / \sqrt{E_p E_k} \right)^{2\alpha+1} J_{\mu}(pa) J_{\mu}(ka), \quad (5)$$

где $\alpha = 0, 1, 2, \dots$. Отметим, что нерелятивистский предел (предел при $m \rightarrow \infty$) потенциала (5) совпадает с выражением (4). Кроме того, на энергетической поверхности $E_k = E_p = E$ потенциал (5) также преобразуется в (4). В следующем разделе мы найдём решения уравнения (1) в случае потенциала (5).

Решение поставленной задачи. Подставляя выражение (5) в уравнение (1), получим

$$\psi_{\mu}(p) = C_{\mu} \lambda a \frac{\sqrt{p} J_{\mu}(pa)}{E_p^2 - E^2} \left(\frac{E}{E_p} \right)^{\alpha+1/2}, \quad (6)$$

где

$$C_{\mu} = \int_0^{\infty} \sqrt{k} \frac{m}{E_k} J_{\mu}(ka) \left(\frac{E}{E_k} \right)^{\alpha+1/2} \psi_{\mu}(k) dk.$$

Для получения условия квантования энергии двухчастичной системы умножим равенство (6) на $\sqrt{p} m / E_p J_{\mu}(pa) (E/E_p)^{\alpha+1/2}$ и проинтегрируем на интервале $[0; \infty)$. Сократив константу C_{μ} , получим следующее условие квантования энергии:

$$1 = \lambda a m E^{2\alpha+1} \int_0^{\infty} \frac{p J_{\mu}^2(pa)}{E_p^2 - E^2} \frac{1}{E_p^{2\alpha+2}} dp. \quad (7)$$

Интеграл в правой части (7) может быть вычислен точно методом, основанном на использовании теоремы Коши о вычетах [3]. Выпишем точные условия квантования энергии:

– для $\alpha = 0$,

$$1 = \frac{\lambda a m}{E} \left[I_{\mu} \left(a \sqrt{m^2 - E^2} \right) K_{\mu} \left(a \sqrt{m^2 - E^2} \right) - I_{\mu}(am) K_{\mu}(am) \right]; \quad (8)$$

– для $\alpha = 1$,

$$1 = \frac{\lambda a}{2E m} \left(ma E^2 I_{\mu-1}(am) K_{\mu}(am) - ma E^2 I_{\mu}(am) K_{\mu-1}(am) - \right. \\ \left. - 2(E^2 \mu + m^2) I_{\mu}(am) K_{\mu}(am) + 2m^2 I_{\mu} \left(a \sqrt{m^2 - E^2} \right) K_{\mu} \left(a \sqrt{m^2 - E^2} \right) \right). \quad (9)$$

Точные условия квантования были получены также для некоторых следующих значений α , однако, мы их здесь не приводим из-за громоздкости полученных выражений. Отметим, что функции (6) имеют бесконечное число нулей, так как они прямо пропорциональны функциям Бесселя.

Уравнения (8) и (9) не могут быть решены точно относительно величины $2E$. Для нахождения приближенных решений воспользуемся разложением в ряд Маклорена по переменной E функции $I_{\mu} \left(a \sqrt{m^2 - E^2} \right) K_{\mu} \left(a \sqrt{m^2 - E^2} \right)$. При этом в условии (8) мы будем учитывать только первые два слагаемые этого разложения, а в условии (9) – первые четыре слагаемые. С учетом этих приближений уравнения (8) и (9) примут вид:

$$1 \approx \frac{E a^2 \lambda}{2} \left[I_{\mu}(am) K_{\mu+1}(am) - I_{\mu-1}(am) K_{\mu}(am) \right] \quad (10)$$

и

$$1 \approx \frac{E^3 a \lambda}{4m^3} \left[-am I_{\mu-1}(am) \left(am K_{\mu-1}(am) + (1+\mu) K_{\mu}(am) \right) + \right. \\ \left. + I_{\mu}(am) \left(a(1+\mu)m K_{\mu-1}(am) + (a^2 m^2 + 2\mu(1+\mu)) K_{\mu}(am) \right) \right] \quad (11)$$

соответственно. Очевидно, что уравнения (10) и (11) разрешимы относительно величины E . Явный вид зависимости энергии от параметров системы таков:

– для $\alpha = 0$,

$$2E \approx 4 \left[a^2 \lambda \left(I_{\mu}(am) K_{\mu+1}(am) - I_{\mu-1}(am) K_{\mu}(am) \right) \right]^{-1}; \quad (12)$$

– для $\alpha = 1$,

$$2E \approx 2 \left[4m/a \lambda f \right]^{1/3}, \quad (13)$$

где введены следующие обозначения

$$f = I_{\mu}(am) \left[a(1+\mu) m K_{\mu-1}(am) + (a^2 m^2 + 2\mu(1+\mu)) K_{\mu}(am) \right] - \\ - am I_{\mu-1}(am) \left[am K_{\mu-1}(am) + (1+\mu) K_{\mu}(am) \right].$$

На рисунке 1 представлены графики зависимости $2E$ от λ . Сплошной линией отображена зависимость, полученная при численном решении трансцендентных уравнений (8) и (9), а штриховой линией показаны результаты, полученные на основании приближенных формул (12), (13).

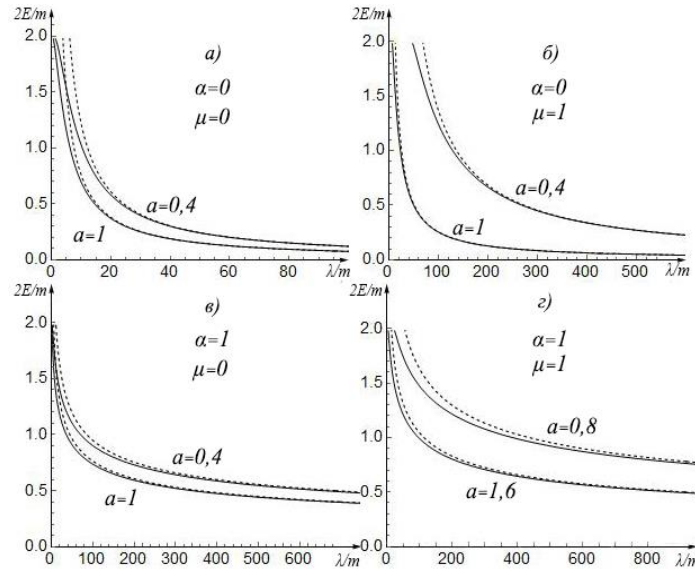


Рисунок 1 – Зависимость энергии от параметров системы для $m=1$

На рисунке 1 видно, что для любого μ существует лишь одно связанное состояние и с ростом параметра a связанное состояние будет существовать при меньших значениях параметра λ .

На рисунке 2 представлены графики парциальных волновых функций (6). При этом для нахождения констант C_{μ} было использовано нерелятивистское условие нормировки:

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} |\psi_{\mu}(p)|^2 dp. \quad (14)$$

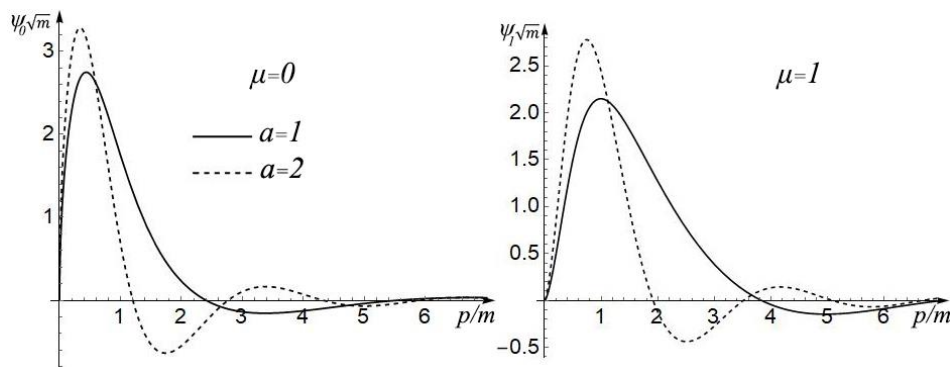


Рисунок 2 – Графики парциальных волновых функций для $m=1$ и $\alpha=0$

Анализ показывает, и на рисунке 2 это видно, что с увеличением значения параметра a нули парциальных волновых функций, а также их максимумы и минимумы смещаются в область меньших значений импульса p .

Заключение. В данной работе найдены точные и приближенные аналитические условия квантования энергии двухчастичной системы для одного из возможных вариантов релятивистского обобщения потенциала «дельта-окружность», который параметрически зависит от энергии системы. Установлено, что для каждого фиксированного значения параметра μ существует только одно связанное состояние, а парциальные волновые функции имеют бесконечное количество нулей.

Литература

1. Павленко, А. В. Приближенное решение двумерного уравнения Логанова–Тавхелидзе в случае потенциала Гаусса / Актуальные вопросы физики и техники: XI Республиканская научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов, посвященная 100-летию со дня рождения академика Белого Владимира Алексеевича / г. Гомель : ГГУ имени Ф. Скорины, 2022. – Ч. 2. – С. 15–19.
2. Arfken, G. Mathematical methods for physicists / G. Arfken, H. Weber, F. Harris. – 7-th ed. – San Diego: Academic Press, 2012. – 1205 p.
3. Гельфонд, А. О. Вычеты и их приложения / А. О. Гельфонд. – М. : Ленанд, 2018. – 114 с.

А. В. Павленко, В. Н. Капшай, Ю. А. Гришечкин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ДВУМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Введение. В работе [1] были получены точные решения двумерного уравнения Логанова–Тавхелидзе, описывающего связанные состояния системы двух скалярных частицы одинаковой массы m для релятивистских аналогов потенциала гармонического осциллятора в импульсном представлении. Выпишем явный вид парциальных волновых функций, соответствующих трем вариантам потенциала, сохраняя обозначения [1] ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ и $n = 0, 1, 2 \dots$):

$$\psi_{1,\mu,n}(p) = C_{1,\mu,n} p^{\frac{1}{2}+|\mu|} \exp\left(-\frac{1}{\omega} \frac{p^2}{2}\right) L_n^{|\mu|}\left(\frac{1}{\omega} p^2\right), \quad (1)$$

$$\psi_{2,\mu,n}(p) = C_{2,\mu,n} p^{\frac{1}{2}+|\mu|} \exp\left(-\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}} \frac{p^2}{2}\right) L_n^{|\mu|}\left(\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}} p^2\right), \quad (2)$$

$$\psi_{3,\mu,n}(p) = C_{3,\mu,n} \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{m} p^{\frac{1}{2}+|\mu|} \exp\left(-\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}} \frac{p^2}{2}\right) L_n^{|\mu|}\left(\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}} p^2\right), \quad (3)$$

где $2E > 2m$ – энергия двухчастичной системы;

$\omega > 0$ – константа связи;

$L_n^{|\mu|}(z)$ – обобщенные полиномы Лагерра [2].