

Анализ показывает, и на рисунке 2 это видно, что с увеличением значения параметра a нули парциальных волновых функций, а также их максимумы и минимумы смещаются в область меньших значений импульса p .

Заключение. В данной работе найдены точные и приближенные аналитические условия квантования энергии двухчастичной системы для одного из возможных вариантов релятивистского обобщения потенциала «дельта-окружность», который параметрически зависит от энергии системы. Установлено, что для каждого фиксированного значения параметра μ существует только одно связанное состояние, а парциальные волновые функции имеют бесконечное количество нулей.

Литература

1. Павленко, А. В. Приближенное решение двумерного уравнения Логанова–Тавхелидзе в случае потенциала Гаусса / Актуальные вопросы физики и техники: XI Республиканская научная конференция студентов, магистрантов и аспирантов, посвященная 100-летию со дня рождения академика Белого Владимира Алексеевича / г. Гомель : ГГУ имени Ф. Скорины, 2022. – Ч. 2. – С. 15–19.
2. Arfken, G. Mathematical methods for physicists / G. Arfken, H. Weber, F. Harris. – 7-th ed. – San Diego: Academic Press, 2012. – 1205 p.
3. Гельфонд, А. О. Вычеты и их приложения / А. О. Гельфонд. – М. : Ленанд, 2018. – 114 с.

А. В. Павленко, В. Н. Капшай, Ю. А. Гришечкин

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины,
г. Гомель, Республика Беларусь

ВОЛНОВЫЕ ФУНКЦИИ ДВУМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В РЕЛЯТИВИСТСКОМ КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Введение. В работе [1] были получены точные решения двумерного уравнения Логанова–Тавхелидзе, описывающего связанные состояния системы двух скалярных частицы одинаковой массы m для релятивистских аналогов потенциала гармонического осциллятора в импульсном представлении. Выпишем явный вид парциальных волновых функций, соответствующих трем вариантам потенциала, сохраняя обозначения [1] ($\mu = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ и $n = 0, 1, 2 \dots$):

$$\psi_{1,\mu,n}(p) = C_{1,\mu,n} p^{\frac{1}{2}+|\mu|} \exp\left(-\frac{1}{\omega} \frac{p^2}{2}\right) L_n^{|\mu|}\left(\frac{1}{\omega} p^2\right), \quad (1)$$

$$\psi_{2,\mu,n}(p) = C_{2,\mu,n} p^{\frac{1}{2}+|\mu|} \exp\left(-\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}} \frac{p^2}{2}\right) L_n^{|\mu|}\left(\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}} p^2\right), \quad (2)$$

$$\psi_{3,\mu,n}(p) = C_{3,\mu,n} \frac{\sqrt{m^2 + p^2}}{m} p^{\frac{1}{2}+|\mu|} \exp\left(-\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}} \frac{p^2}{2}\right) L_n^{|\mu|}\left(\sqrt{\frac{E}{m\omega^2}} p^2\right), \quad (3)$$

где $2E > 2m$ – энергия двухчастичной системы;

$\omega > 0$ – константа связи;

$L_n^{|\mu|}(z)$ – обобщенные полиномы Лагерра [2].

Условия квантования энергии двухчастичной системы имеют вид:

– для парциальных волновых функций (1)

$$2E = 2\sqrt{2\omega(2n+|\mu|+1)+m^2}, \quad (4)$$

– для парциальных волновых функций (2) – (4)

$$\sqrt{E(E^2 - m^2)} = 2\omega \sqrt{m(2n+|\mu|+1)}. \quad (5)$$

В данной работе мы рассматриваем преобразование парциальных волновых функций из импульсного представления в релятивистское конфигурационное представление.

1. Двумерное релятивистское конфигурационное представление. В квантовой теории поля переход из двумерного импульсного представления в двумерное релятивистское конфигурационное представление осуществляется посредством разложения функций по матричным элементам неприводимого унитарного представления группы Лоренца ($SO(1,2)$), которые имеют вид [3]:

$$\xi(\mathbf{p}, \rho) = \left(\frac{\sqrt{m^2 + p^2} - \mathbf{p} \mathbf{n}_\rho}{m} \right)^{-1/2 - i m \rho}, \quad \mathbf{n}_\rho = \frac{\mathbf{p}}{\rho}, \quad (6)$$

где $\mathbf{p} = \rho \mathbf{n}_\rho$ – двумерный радиус-вектор в релятивистском конфигурационном представлении. Двумерное преобразование для волновой функции из импульсного представления в релятивистское конфигурационное представление имеет вид [3]:

$$\psi(\rho) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \xi(\mathbf{p}, \rho) \psi(\mathbf{p}) \frac{m}{E_p} d\mathbf{p}. \quad (7)$$

Представим парциальное разложение функций входящих в (7) в форме рядов ($p = m \operatorname{sh} \chi_p$):

$$\psi(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} i^\mu \psi_\mu(\rho) \exp(i\mu\gamma), \quad \psi(\mathbf{p}) = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \psi_\mu(\chi_p) \exp(i\mu\varphi), \quad (8)$$

$$\xi(\mathbf{p}, \rho) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} i^\mu s_\mu(\chi_p, \rho) \exp(i\mu\varphi),$$

где χ_p – быстрота;

γ – угол между вектором $\mathbf{p}$ и осью абсцисс;

φ – угол между импульсом $\mathbf{p}$ и осью абсцисс;

$s_\mu(\chi_p, \rho)$ – парциальные волны, имеющие вид

$$s_\mu(\chi_p, \rho) = i^\mu \frac{\Gamma(-im\rho + 1/2)}{\Gamma(-im\rho + 1/2 + \mu)} P_{-im\rho - 1/2}^\mu(\operatorname{ch} \chi_p), \quad (9)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма функция;

$P_a^b(z)$ – функция Лежандра первого рода [2]. Подставив ряды (8) в (7), получим формулу

$$\psi_{s,\mu,n}(\rho) = \frac{m}{2\pi} \int_0^\infty d\chi_p \sqrt{m\rho \operatorname{sh} \chi_p} s_\mu(\chi_p, \rho) \psi_{s,\mu,n}(\chi_p), \quad (10)$$

которая связывает парциальные волновые функции в двух представлениях.

2. Парциальные волновые функции в релятивистском конфигурационном представлении. Подстановка (1) – (3) в формулу (10) и последующее вычисление интегралов [2] приводит к выражениям, которые для первых двух значений n имеют вид:

– для $n = 0$

$$\psi_{1,\mu,0}(\rho) = C_{1,\mu,0} \frac{\omega^{3/4+\mu/2}}{2^{5/4+\mu/2}} \exp\left(\frac{m^2 - \sqrt{E m^3}}{4\omega}\right) f_\mu(\rho) W_{-1/4-\mu/2, -imp/2}\left(\frac{m^2}{2\omega}\right), \quad (11)$$

$$\psi_{2,\mu,0}(\rho) = C_{2,\mu,0} \frac{m^{3/8+\mu/4}}{2^{5/4+\mu/2}} \left(\frac{\omega^2}{E}\right)^{3/8+\mu/4} f_\mu(\rho) W_{-1/4-\mu/2, -imp/2}\left(\frac{\sqrt{E m^3}}{2\omega}\right), \quad (12)$$

$$\psi_{3,\mu,0}(\rho) = C_{3,\mu,0} \frac{m^{-3/8+\mu/4}}{2^{3/4+\mu/2}} \left(\frac{\omega^2}{E}\right)^{5/8+\mu/4} f_\mu(\rho) W_{1/4-\mu/2, -imp/2}\left(\frac{\sqrt{E m^3}}{2\omega}\right), \quad (13)$$

– для $n = 1$

$$\begin{aligned} \psi_{1,\mu,1}(\rho) = & C_{1,\mu,1} \frac{\omega^{3/4+\mu/2}}{2^{5/4+\mu/2}} \exp\left(\frac{m^2}{4\omega}\right) \exp\left(-\frac{\sqrt{E m^3}}{4\omega}\right) f_\mu(\rho) \times \\ & \times \left[\left(\frac{m^2}{\omega} + \mu\right) W_{-1/4-\mu/2, -imp/2}\left(\frac{m^2}{2\omega}\right) - 2 W_{3/4-\mu/2, -imp/2}\left(\frac{m^2}{2\omega}\right) \right], \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \psi_{2,\mu,1}(\rho) = & C_{2,\mu,1} \frac{m^{3/8+\mu/4}}{2^{5/4+\mu/2}} \left(\frac{\omega^2}{E}\right)^{3/8+\mu/4} f_\mu(\rho) \times \\ & \times \left[\left(\sqrt{\frac{E m^3}{\omega^2}} + \mu\right) W_{-1/4-\mu/2, -imp/2}\left(\frac{\sqrt{E m^3}}{2\omega}\right) - 2 W_{3/4-\mu/2, -imp/2}\left(\frac{\sqrt{E m^3}}{2\omega}\right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \psi_{3,\mu,1}(\rho) = & C_{3,\mu,1} \frac{m^{-3/8+\mu/4}}{2^{3/4+\mu/2}} \left(\frac{\omega^2}{E}\right)^{5/8+\mu/4} f_\mu(\rho) \times \\ & \times \left[\left(\sqrt{\frac{E m^3}{\omega^2}} + \mu - 2\right) W_{1/4-\mu/2, -imp/2}\left(\frac{\sqrt{E m^3}}{2\omega}\right) - 2 W_{5/4-\mu/2, -imp/2}\left(\frac{\sqrt{E m^3}}{2\omega}\right) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где введено обозначение $f_\mu(\rho) = i^\mu \exp\left(\frac{\sqrt{E m^3}}{4\omega}\right) \frac{\sqrt{m\rho}}{\pi} \frac{\Gamma(1/2 - i m \rho)}{\Gamma(1/2 - i m \rho - \mu)}$;

$W_{a,b}(z)$ – функция Уиттекера [2]. Отметим, что для $\mu > 0$ функции (11) – (16) являются комплексными. В нерелятивистском пределе (предел при $m \rightarrow \infty$) функции (11) – (16), преобразуются в соответственно функции нерелятивистского гармонического осциллятора в координатном представлении:

$$\psi_{\mu,0}(\rho) = C_{\mu,0} \rho^{1/2+\mu} \exp\left(-\frac{\omega \rho^2}{2}\right), \quad (17)$$

$$\psi_{\mu,1}(\rho) = C_{\mu,1} \rho^{1/2+\mu} \exp\left(-\frac{\omega \rho^2}{2}\right) L_1^{|\mu|}(\omega \rho^2). \quad (18)$$

На рисунке 1 представлены графики квадрата модуля функций (11) – (16) для $m=1$ и $\omega=1$, которые были нормированы численно с использованием следующего условия:

$$1 = 2\pi \int_0^\infty |\psi_{s,\mu,n}(\rho)|^2 d\rho. \quad (19)$$

где $s=1,2,3$ номер соответствующий одной из трех волновых функций (1) – (3).

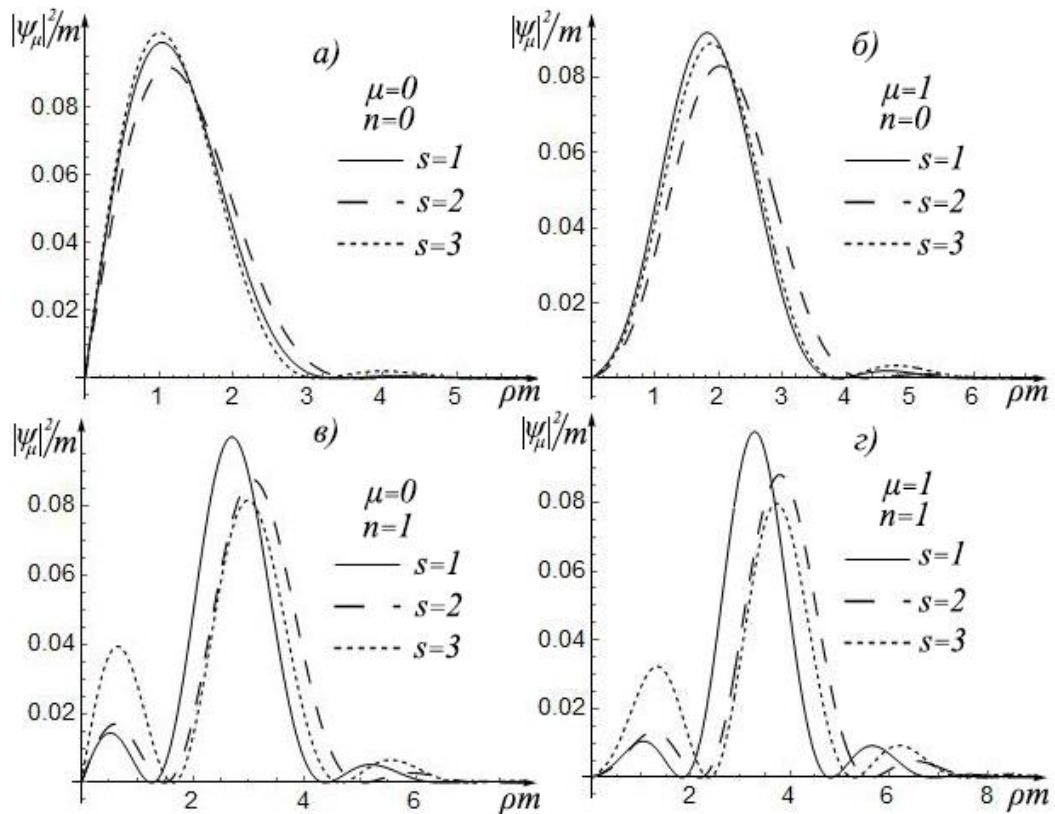


Рисунок 1 – Графики парциальных волновых функций

Из рисунка 1 следует, что парциальные волновые функции (11) – (16) имеют нули, количество которых отличается от количества нулей функций (17) – (18), которое равно $n+1$.

Заключение. В данной работе получены точные выражения для парциальных волновых функций в релятивистском конфигурационном представлении для трех релятивистских вариантов потенциала гармонического осциллятора в импульсном представлении. Показано, что в нерелятивистском пределе парциальные волновые функции в релятивистском конфигурационном представлении переходят в известные парциальные волновые функции гармонического осциллятора в координатном представлении. Установлено, что количество нулей парциальных волновых функций в релятивистском конфигурационном представлении отличается от количества нулей нерелятивистских парциальных волновых функций гармонического осциллятора в координатном представлении.

Литература

1. Павленко, А. В. Точные решения двумерного квазипотенциального уравнения с релятивистскими аналогами потенциала гармонического осциллятора / А. В. Павленко, Ю. А. Гришечкин, В. Н. Капшай // Известия ВУЗов. Физика. – 2024. – Т. 67, № 5. – С. 27–34.
2. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и производных / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – Санкт-Петербург: БХВ-Петербург, 2011. – 1232 с
3. Nagiyev, S. M. The relativistic two-dimensional harmonic oscillator / S. M. Nagiyev, E. I. Jafarov, M.Y. Efendiyev // IL Nuovo Cimento. – 2009. – Vol. 124B. – P. 395–403.

В. А. Плетюхов, А. М. Кузьмич

Брестский государственный университет имени А. С. Пушкина,
г. Брест, Республика Беларусь

ОБ ОПИСАНИИ ИЗОСПИНОВЫХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ МИКРООБЪЕКТОВ НА ОСНОВЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОБОБЩЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДИРАКА–КЭЛЕРА

Как известно, спин является первым (в смысле хронологии) из внутренних квантовых чисел микрообъектов, существование которого было предсказано в 1925 году и вскоре подтверждено экспериментально. Из уравнения Дирака (1928) наличие спина у электрона вытекает как следствие требования релятивистской инвариантности законов природы. Это означает, что происхождение спина тесно связано со свойствами пространства-времени. Впоследствии было установлено, что спин присущ большинству элементарных частиц, то есть является универсальным атрибутом микроматерии.

С открытием всё большего числа новых частиц возникает необходимость введения в рассмотрение других внутренних (изоспиновых) квантовых чисел, таких, например, как изотопический спин, аромат, цвет и другие. В современных унитарных калибровочных моделях изоспиновые степени свободы вводятся путем использования в качестве исходной системы из нескольких уравнений Дирака, которые не связаны между собой преобразованиями группы Лоренца. Такой подход означает по сути, что на глобальном уровне изоспиновые степени свободы имеют внепространственно-временное происхождение.

Естественно возникает вопрос, а можно ли построить модель, в рамках которой не только спин, но и все остальные известные внутренние степени свободы микрообъектов обусловлены релятивистскими свойствами пространства-времени. В принципе, это возможно, если в основу модели положить не распадающееся по группе Лоренца релятивистское квантовомеханическое уравнение дираковского типа с достаточно большим числом компонентов волновой функции. Весьма перспективным в данном отношении на определенном этапе считалось уравнение Дирака–Кэлера, которое допускает физически