

Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ, И. М. ГАЛИ, В. А. ЖУК

О ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕННЫХ ФУНКЦИЯХ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 VII 1971)

Для положительно определенных (п.о.) ядер $K(x, y)$ точек x, y конечномерного пространства существует общий, восходящий к М. Г. Крейну ⁽¹⁾, метод получения интегральных представлений по собственным функциям дифференциальных и других классов операторов ⁽²⁾, гл. VIII; ⁽³⁾ (в ⁽²⁾ приведена библиография). Он заключается во введении по ядру $K(x, y)$ гильбертова пространства и построении разложения по обобщенным собственным векторам самосопряженных операторов, рассматриваемых в этом пространстве. В ^(4, 5) этот прием применялся к задачи типа проблемы моментов, в которых фигурировали точки пространств возрастающей до ∞ размерности. В этой заметке будет показано, что он применим и в случае дифференциальных операторов, действующих в пространстве функций бесконечного числа переменных. Мы, в основном, ограничимся п.о. функциями $k(x)$ в слое $\{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^\infty \mid x_1 \in (-2l; 2l)\}$, где $\mathbb{R}^\infty = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1 \times \dots$; на этом примере будет видно, как получать представления и в общем случае. В частности, будет получено обобщение теоремы Р. А. Минлоса — В. В. Сазонова ^(6, 7) на п.о. функции в слое гильбертова пространства. Случая ядерных пространств мы здесь касаться не будем.

1°. Рассмотрим сперва п.о. в «интегральном смысле» функции. Пусть $\mathbb{R}_l^\infty = (-l, l) \times \mathbb{R}^\infty$, $0 < l < \infty$, — слой пространства $\mathbb{R}^\infty$, $x = (x_1, x')$, $x_1 \in (-l, l)$, $x' \in \mathbb{R}^\infty$, — его точки. Введем в $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^\infty$ меру $d\tau(x) = dx_1 \otimes d\omega(x')$, где dx_1 — мера Лебега, а $d\omega(x') = ((2\pi)^{-1/2} \exp(x_2^2/2) dx_2) \otimes ((2\pi)^{-1/2} \exp(-x_3^2/2) dx_3) \otimes \dots$ — гауссовская мера в $\mathbb{R}^\infty$. Измеримая почти везде ограниченная относительно меры $d\tau(x)$ функция $k(x): \mathbb{R}_{2l}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^1$ называется п.о., если выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}_l^\infty} \int_{\mathbb{R}_l^\infty} k(y - x) u(y) \overline{u(x)} d\tau_1(x) d\tau_1(y) \geq 0. \quad (1)$$

Здесь u — любая цилиндрическая функция класса C_0^∞ , т. е. функция вида $u(x) = u_n(x_1, \dots, x_m)$, где u_n — бесконечно дифференцируемая финитная функция точки из $\mathbb{R}^m$, $m = 1, 2, \dots$; $d\tau_1(x) = dx_1 \otimes (\pi^{-1/2} \exp(-x_2^2) dx_2) \otimes (\pi^{-1/2} \exp(-x_3^2) dx_3) \otimes \dots$

Аналогичное определение имеет место и в случае $l = \infty$, когда $\mathbb{R}_l^\infty = \mathbb{R}^\infty$; нужно только меры $d\tau(x)$ и $d\tau_1(x)$ брать гауссовскими: заменить dx_1 на $(2\pi)^{-1/2} \exp(-x_1^2/2) dx_1$ и $\pi^{-1/2} \exp(-x_1^2) dx_1$ соответственно.

Теорема 1. Каждая п.о. функции $k(x)$, $x \in \mathbb{R}_{2l}^\infty$, $l \leq \infty$, допускает справедливое $d\tau(x)$ почти для каждого $x \in \mathbb{R}_{2l}^\infty$ представление

$$k(x) = \int_{l_2} e^{i(\lambda, x)} d\rho(\lambda). \quad (2)$$

Здесь $d\rho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера, $e^{i(\lambda, x)}$ определяется как сильный в смысле пространства $L_2(\mathbb{R}^\infty, d\omega(x))$ предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(\sum_{\mu=1}^n \lambda_\mu x_\mu)$, интеграл от вектор-функции $l_2 \ni \lambda \rightarrow e^{i(\lambda, x)} \in L_2(\mathbb{R}^\infty, d\omega(x))$ сходится сильно. В случае $l = \infty$ мера $d\rho(\lambda)$ по $k(x)$ определяется однозначно, в случае $l < \infty$ однозначности, вообще говоря, нет.

Обратно, всякий интеграл вида (2) является п.о. функцией в $\mathbb{R}^\infty$.

Замечания. 1) Из теоремы следует, что всякая п.о. функция в R_{2l}^∞ может быть продолжена, вообще говоря неоднозначно, до п.о. функции в R^∞ . 2) Близкая теорема справедлива и в случае негауссовских мер. Именно, в определении (1) меру $dt_1(x)$ можно заменить на меру, строящуюся не по $\pi^{-1/2}e^{-t^2}dt$, а по $p(t)dt$, где $p(t) > 0$ — достаточно произвольный вес такой, что $\int_R p(t)dt = 1$. В формуле типа (2) интегрирование будет ве-

стись по множеству последовательностей $\lambda \in R^\infty$, для которых существует конечный положительный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} |\tilde{p}(\lambda_1) \dots \tilde{p}(\lambda_n)|$ ($\tilde{p}$ — преобразование Фурье p).

Наметим схему доказательства. Пусть $l < \infty$, $p(t) = \pi^{-1/2}e^{-t^2}$. Построим гильбертово пространство H_h , принимая в качестве квазискаллярного произведения (u, u) форму (1). В этом пространстве определим операторы A_1 и A_μ , $\mu = 2, 3, \dots$, как замыкания отображений $u(x) \rightarrow i \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u \right) (x)$ и $u(x) \rightarrow ip^{-1}(x_\mu) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} p(x_\mu) u \right) (x)$, определенных на цилиндрических функциях вида $C_0^\infty((-l, l) \otimes D \otimes D \otimes \dots)$, где $D = \{u \in C^\infty(R^1) | u, p^{-1}(pu)' \in L_2(R^1, p(t)dt)\}$. Подобно (²), стр. 713—715, можно доказать, что оператор A_1 эрмитов, а A_μ — самосопряженные коммутирующие. При помощи теоремы М. С. Лившица (см., например, (³), гл. VIII, теорема 2.6) устанавливается, что у оператора A_1 существует самосопряженное расширение $\tilde{A}_1$, коммутирующее с A_μ , $\mu = 2, 3, \dots$. Затем для системы коммутирующих самосопряженных операторов $\tilde{A}_1, (A_\mu)_{\mu=2}^\infty$ строим разложение по их общим обобщенным собственным векторам в форме континуального интеграла (³). Переходя в соответствующем равенстве Парсевала к элементарным ядрам (², ³) и производя требуемые подсчеты, приходим к представлению (2). Положительное пространство $H_+ \subseteq H_h$, необходимое для построения разложения, строится как должным образом сконструированное бесконечное тензорное произведение взвешенных соболевских пространств на R^1 .

2°. Из теоремы 1 вытекает теорема Р. А. Минлоса — В. В. Сазонова для слоя гильбертова пространства. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, e_1 — некоторый орт в H и H' — ортогональное дополнение в H к $R^1 e_1$. Слой H_l пространства H будем называть $(-l, l) \times H' \subset H$; $x = (x_1, x')$, $x_1 \in (-l, l)$, $x' \in H'$, — его точки. При $l = \infty$ $H_l = H$. Функция $k(x): H_{2l} \rightarrow C^1$ называется п.о., если для любых $x^{(1)}, \dots, x^{(N)} \in H_l$ и $\xi_1, \dots, \xi_N \in C^1$, $N = 1, 2, \dots$, выполняется неравенство

$$\sum_{j,k=1}^N k(x^{(j)} - x^{(k)}) \xi_j \bar{\xi}_k \geq 0. \quad (3)$$

J -топологией в H (⁷) называется топология, задаваемая окрестностями нуля вида $\{x \in H | (Ax, x) < 1\}$, где A — неотрицательные ядерные операторы. Будем говорить, что функция $k(x)$, $x \in H_{2l}$, непрерывна в 0 в J -топологии, если она непрерывна в 0 в топологии, индуцируемой J -топологией на H_{2l} .

Теорема 2. Каждая п.о. функция $k(x)$, $x \in H_{2l}$, $l \leq \infty$, непрерывная в 0 в J -топологии, допускает представление

$$k(x) = \int_H e^{i(\lambda, x)} d\rho(\lambda), \quad x \in H_{2l}, \quad (4)$$

где $d\rho(\lambda)$ — неотрицательная конечная мера. В случае $l = \infty$ мера $d\rho(\lambda)$ определяется по $k(x)$ однозначно, в случае $l < \infty$ однозначности, вообще говоря, нет.

Обратно, всякий интеграл вида (4) является п.о. функцией в H , непрерывной в J -топологии.

Наметим доказательство. Ясно, что при фиксированной $k(x)$ можно построить неотрицательный ядерный с нулевым ядром оператор

B такой, что $k(x)$ будет непрерывна в 0 в топологии, задаваемой окрестностями $\{x \in H_{2l} \mid (Bx, x) < \delta\}$, $\delta > 0$. При этом B можно выбрать так, что $Be_1 = e_1$. Введем скалярное произведение в H , полагая $(x, y)_B = (Bx, y)$ и произведем пополнение; пусть H_B — полученное гильбертово пространство. Так как для п.о. функции непрерывность в 0 определяет ее равномерную непрерывность, то $k(x)$, $x \in H_{2l}$, можно по непрерывности продолжить на замыкание H_{2l} в H_B . Это замыкание, очевидно, будет иметь вид $(-2l, 2l) \times H'_{B'}$, $H'_{B'}$ строится как и H_B по H' и части B' оператора B в H' . Переходя в (3) к пределу, получим, что продолженная функция $k(x)$, $x \in H_{B, 2l}$, будет п.о. При помощи критерия А. Н. Колмогорова — А. Я. Хинчина ⁽⁸⁾, стр. 54—56, устанавливается, что $H_{B, 2l}$ — множество полной $d\tau(x)$ меры в $\mathbf{R}_{2l}^\infty$, и поэтому $k(x)$ можно рассматривать как $d\tau(x)$ — почти везде ограниченную числом $k(0)$ измеримую функцию в $\mathbf{R}_{2l}^\infty$. Нетрудно убедиться, что она будет п.о. в смысле п. 1^о и поэтому допускает представление (2). Из (2) можно получить (4): умножим (2) на δ -образную должным образом построенную последовательность, стягивающуюся к точке из H_{2l} в смысле топологии H_B и меры $d\tau(x)$, и перейдем к пределу.

Отметим, что доказать теорему 2 обычным рассуждением, используя сужение $k(x)$, $x \in H_{2l}$, на произвольный конечномерный слой $(-2l, 2l) \times G'$, $G' \subseteq H'$, $\dim G' < \infty$, не удастся, так как мера в конечномерном пространстве, отвечающая этому сужению, не определяется, вообще говоря, однозначно и поэтому нельзя даже говорить о согласованности полученной системы мер цилиндрических множеств.

3^о. Из теоремы 2 вытекает, что каждая п.о. функция в H_{2l} , $l < \infty$, непрерывная в J -топологии, может быть продолжена, вообще говоря, неоднозначно, до п.о. функции в H , непрерывной в J -топологии. При помощи обобщения методики работ ⁽⁹⁾, ⁽²⁾, стр. 715—720, и ⁽¹⁰⁾ все такие продолжения могут быть описаны.

Ряд известных условий однозначности и неоднозначности продолжения п.о. функции одной переменной ⁽²⁾, стр. 678—683, может быть обобщен на наш случай. Так, пусть B — оператор, указанный в п. 2^о. Положим $\kappa(\xi) = k(B^{-1/2}\xi)$, $\xi \in \mathfrak{D}(B^{-1/2})$. Непрерывность $k(x)$ в J -топологии в 0 эквивалентна непрерывности в 0 функции $\kappa(\xi)$ в топологии H . Если $\kappa(\xi)$ бесконечно дифференцируема в 0 в топологии H и для этих производных класс $C\{\| (D^{2n}\kappa)(0) \|_{H_B^{2n}}\}$, $H_B^{2n} = \underbrace{H_B \otimes \dots \otimes H_B}_{2n}$, квазианалитический, то $k(x)$ продолжается с H_{2l} однозначно. Поясним, что здесь под производной в 0, как обычно, принимается симметрическая полилинейная форма, которая затем записана при помощи теоремы о ядре как элемент H_B^{2n} . Отметим, что, как и в случае $k(x)$, $x \in \mathbf{R}^1$, последовательность $S_n = (-i)^n (D^n \kappa)(0)$, $n = 0, 1, \dots$, моментна в смысле ⁽⁵⁾, пример 5).

4^о. Доказательство теоремы 1 имеет достаточно общий характер; подобным образом может быть обобщена на случай бесконечного числа переменных теория экспоненциально выпуклых функций ⁽²⁾, стр. 694—696, 711—712.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
5 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Г. Крейн, ДАН, 53, № 1 (1946). ² Ю. М. Березанский. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965. ³ Ю. М. Березанский, Сибирск. матем. журн., 9, № 5 (1968). ⁴ Ю. М. Березанский, Функци. анализ и его прилож., 3, № 2 (1969). ⁵ Ю. М. Березанский, С. Н. Шифрил, Укр. матем. журн., 23, № 3 (1971). ⁶ Р. А. Миллс, Тр. Московск. матем. общ., 8 (1959). ⁷ В. В. Сазонов, Теор. вероятн. и ее примен., 3, № 2 (1958). ⁸ Г. Е. Шилов, Фан Дык Тянь, Интеграл, мера и производная на линейных пространствах, «Наука», 1967. ⁹ Б. Я. Левин, И. Е. Овчаренко, Теор. функций, функц. анализ и их прилож., 5 (1967). ¹⁰ Ю. М. Березанский, М. Л. Горбачук, Укр. матем. журн., 17, № 5 (1965).