Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 1

УДК 517.55

МАТЕМАТИКА

Ш. А. ДАУТОВ

О ФОРМАХ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГОЛОМОРФНЫМ ФУНКЦИЯМ ПРИ ИНТЕГРИРОВАНИИ ПО ГРАНИЦЕ СТРОГО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЕЙ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 5 VIII 1971)

1. Пусть D — ограниченная область в $\mathbf{C}^n$ с гладкой границей ∂D, $A(\bar{D})$, $A_c(D)$,— алгебра функций, голоморфных на $\bar{D}$ (голоморфных в D, непрерывных в $\bar{D}$). Ставится задача описания внешних дифференциальных форм α размерности $2n-1$ на ∂D, ортогональных функциям из $A(\bar{D})$ (соответственно из $A_c(D)$) (будем говорить $\alpha \in A^\perp(\bar{D})$ или $\alpha \in A_c^\perp(D)$), то есть таких, что для всякой $f \in A(\bar{D})$ или $f \in A_c(D)$

$$\int_{\partial D} f\alpha = 0. \tag{1}$$

При $n=1$ любую форму размерности 1 на ∂D можно представить в виде $\varphi\, dz$ и поэтому можно говорить об описании функций, заданных на ∂D, ортогональных функциям из $A(\bar{D})$. Известно ([1], стр. 131), что в областях, ограниченных конечным числом гладких контуров, непрерывная функция ортогональна голоморфным тогда и только тогда, когда она продолжается в D как голоморфная. Это условие можно переформулировать так: *если α — непрерывная форма размерности 1 на ∂D, то $\alpha \in A^\perp(\bar{D})$ тогда и только тогда, когда существует форма γ, непрерывно дифференцируемая в D, непрерывная в $\bar{D}$, такая, что $\bar{\partial}\gamma = 0$ и $\gamma|_{\partial D} = \alpha$.*

2. Обозначим $C^k_{(p,q)}(\bar{D})$, $0 \leqslant p,\ q \leqslant n$, $k = 1, 2, \ldots, \infty$, пространство внешних форм типа (p, q), коэффициенты которых принадлежат классу $C^k(\bar{D})$.

При $n>1$ из результатов [2] следует, что $\bar{\partial}$-замкнутые формы $\beta \in C^\infty_{(n,n-1)}(\bar{D})$ слабо плотны (в смысле $C(\partial D)$-топологии пространства $C^*(\partial D)$, $C(\partial D)$ — пространство непрерывных на ∂D функций) во множестве форм (и даже мер) из $A_c^\perp(D)$.

Пусть на ∂D заданы функции $w_k(z)$, $k=1,\ldots,n$, класса C^1 такие, что $w_1z_1 + \ldots + w_nz_n = 1$, $z \in \partial D$, и полиномы от z, w плотны в $C(\partial D)$, а форма

$$\omega = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} w_k dw_1 \wedge \ldots [k] \ldots dw_n \wedge dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n$$

не вырождена на ∂D. Определенным шагом в решении указанной в п. 1 задачи является описание полиномов $P(z, w)$, для которых $P\omega \in A^\perp(\bar{D})$. Такое описание и некоторые приложения (аналог классической теоремы Риссов) даны в [3].

Можно доказать следующее

Предложение.* *$P\omega \in A^\perp(\bar{D})$ тогда и только тогда, когда $P\omega$ продолжается в D как $\bar{\partial}$-точная (а, значит, $\bar{\partial}$-замкнутая) форма типа $(n, n-1)$.*

---

* Получено совместно Л. А. Айзенбергом и автором.

3. Пусть теперь D — строго псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, с границей класса C^5, то есть D можно записать так: $D = \{z\colon \rho(z) < 0\}$, $\rho(z)$ — функция класса C^5 в окрестности $\bar{D}$, $\operatorname{grad}\rho|_{\partial D} \neq 0$ и $\rho(z)$ — строго плюрисубгармонична в окрестности ∂D. Оказывается, для таких областей возможно описание форм из $A^{\perp}(\bar{D})$, аналогичное сформулированному выше для областей в $\mathbb{C}^1$. А именно, справедлива

Теорема. *Если D — строго псевдовыпуклая область с границей класса C^5 и форма α размерности $2n-1$ класса C^4 на ∂D, то $\alpha \in A^{\perp}(\bar{D})$ тогда и только тогда, когда существует $\gamma \in C^1_{(n,n-1)}(\bar{D})$ такая, что $\bar{\partial}\gamma = 0$ и $\gamma|_{\partial D} = \alpha$.*

Для доказательства нам потребуются две леммы.

Лемма 1. *Пусть $D = \{z\colon \rho(z) < 0\}$ — область с границей класса C^m и $\alpha \in C^k_{(n,n-1)}(\bar{D})$, $2 \leqslant k \leqslant m$, такая, что $\bar{\partial}\alpha = \rho^l\beta$, $l \geqslant 0$, $\beta \in C^{k-1}_{(n,n)}(\bar{D})$; тогда существует $\alpha_1 \in C^{k-1}_{(n,n-1)}(\bar{D})$ такая, что $\alpha_1|_{\partial D} = \alpha|_{\partial D}$ и $\bar{\partial}\alpha_1 = \rho^{l+1}\beta_1$, $\beta_1 \in C^{k-2}_{(n,n)}(\bar{D})$.*

Доказательство. По условию $\rho(z)$, $z \in U$, — функция класса $C^m(U)$, $\bar{D} \subset U$, и $\operatorname{grad}\rho|_{\partial D} \neq 0$. Отсюда следует, что множество $U_i = \{z \in U,\ \rho'_{\bar{z}_i}(z) \neq 0\}$, $i = 1, \ldots, n$, покрывают ∂D. Пусть U_0 — такое открытое множество, что $U_0 \Subset D$ и $\bar{D} \subset \bigcup_{i=0}^{n} U_i$ $\{\varphi_i\}_{i=0,1,\ldots,n}$ — разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}$ и $\beta = h\,d\bar{z} \wedge dz$. Положим $a_i(z)$ равной $h\varphi_i[\rho'_{\bar{z}_i}]^{-1}$ в $\bar{D} \cap U_i$ и 0 в $\bar{D} \setminus U_i$, $i = 1, \ldots, n$,

$$\chi = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_i d\bar{z}\,[i] \wedge dz.$$

Тогда $\chi \in C^{k-1}_{(n,n-1)}(\bar{D})$ и $\bar{\partial}\rho \wedge \chi = (1 - \varphi_0)\beta$. Отсюда и из того, что $\operatorname{supp}\varphi_0 \Subset D$, следует, что форма $\alpha_1 = \alpha + (l+1)^{-1}\rho^{l+1}\chi$ искомая.

Для $x, y \in \mathbb{C}^n$ обозначим $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n$.

В ([4], [5]) показано, что для D при условиях теоремы существует вектор-функция $P(\zeta, z) = (P_1, \ldots, P_n)$, $\zeta \in V$, $z \in V \setminus D$, для некоторой области V, $\bar{D} \subset V$, такая, что

1) $P(\zeta, z)$ класса C^3 по z при фиксированном ζ, причем $P(\zeta, z)$ и все ее производные непрерывны по совокупности $(\zeta, z) \in V \times (V \setminus D)$;

2) $P(\zeta, z)$ голоморфна по ζ при фиксированных z;

3) $\Phi(\zeta, z) = \langle P, \zeta - z\rangle \neq 0$ при $z \in V \setminus D$, $\zeta \in \bar{D} \setminus \{z\}$;

4) $|\Phi(\zeta, z)| \geqslant C_1|\rho(\zeta)| + C_2|\zeta - z|^2$ при $\zeta \in \bar{D}$, $z \in V \setminus D$, $|\zeta - z| < \varepsilon$ для некоторых положительных ε, C_1, C_2.

Пусть $Q^k = (Q_1^k, \ldots, Q_n^k)$, $k = 1, \ldots, m$, — вектор-функции, обозначим $\bar{\partial}_z Q^k = (\bar{\partial}_z Q_1^k, \ldots, \bar{\partial}_z Q_n^k)$. Образуем внешние дифференциальные формы

$$D_{\nu_{l+1},\ldots,\nu_m}(Q^1, \ldots, Q^l, \bar{\partial}_z Q^{l+1}, \ldots, \bar{\partial}_z Q^m)$$

— определители порядка n, первыми l столбцами которого являются векторы $Q^1, \ldots, Q^l$, следующие ν_{l+1} столбцов — вектор $\bar{\partial}_z Q^{l+1}$, и т. д. последние ν_m столбцов — вектор $\bar{\partial}_z Q^m$, $l + \nu_{l+1} + \ldots + \nu_m = n$.

Обозначим $v = (\Phi^{-1}P_1, \ldots, \Phi^{-1}P_n)$ и $u = (|\zeta - z|^{-2}(\bar{\zeta}_1 - \bar{z}_1), \ldots, |\zeta - z|^{-2}(\bar{\zeta}_n - \bar{z}_n))$. Ясно, что $\langle v, \zeta - z\rangle = \langle u, \zeta - z\rangle = 1$ и v и $\bar{\partial}_z v$ голоморфно зависят от $\zeta \in \bar{D}$ при $z \in V \setminus \bar{D}$.

Лемма 2 ([6]).

$$D_{n+1}(u, \bar{\partial}_z u) = D_{n+1}(v, \bar{\partial}_z v) + \bar{\partial}\omega,$$

$$\omega = \sum_{j=0}^{n-2} D_{j,n-j-2}(v, u, \bar{\partial}_z u, \bar{\partial}_z v).$$

Заметим что

$$D_{j,n-j-2}(v, u, \bar{\partial}_z u, \bar{\partial}_z v) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(\bar{\zeta}_k - \bar{z}_k)\,\mu_{jk}(\zeta, z)}{|\zeta - z|^{2(j+1)}\Phi^{n-j-1}}, \tag{2}$$

где $\mu_{jk}(\zeta, z)$ — форма типа $(0, n-1)$ по z, причем коэффициенты формы дважды дифференцируемы по z и вместе со своими первыми и вторыми производными непрерывными по совокупности $(\zeta, z) \in V \times (V \setminus D)$.

Доказательство теоремы. Достаточность следует из формулы Стокса и из того, что для каждой $f \in A(\bar{D})$ $df\gamma = \bar{\partial} f\gamma = 0$.

Необходимость. Любую форму размерности $2n-1$ класса C^4 на ∂D класса C^5 можно представить как сужение на ∂D формы $\alpha_1 \in C^4_{(n,n-1)}(\bar{D})$. Применив дважды лемму 1 к форме α_1, для которой $l = 0$, получим форму $\alpha_2 \in C^2_{(n,n-1)}(\bar{D})$ такую, что $\alpha_2|_{\partial D} = \alpha$ и $\bar{\partial}\alpha_2 = \rho^2\beta$.

Введем следующие формы:

$$\theta(z) = \int_D \bar{\partial}\alpha_2(\zeta) \wedge D_{n-1}(u, \bar{\partial}_z u) \wedge dz, \quad z \in V; \tag{3}$$

$$\psi(z) = \int_D \bar{\partial}\alpha_2(\zeta) \wedge \omega \wedge dz, \quad z \in V \setminus D; \tag{4}$$

$\theta \in C^2_{(n,n-1)}(V)$. Для доказательства заметим, что $\bar{\partial}\alpha_2$ можно доопределить до формы $\beta_1 \in C^1_{(n,n)}(\mathbf{C}^n)$, положив $\beta_1 \equiv 0$ при $z \notin D$, перейти в (3) к интегрированию по $\mathbf{C}^n$, сделать замену переменных $\zeta' = \zeta - z$; в полученном интеграле можно дифференцировать под знаком интеграла. Кроме того из интегрального представления Коппельмана ([7]) получим

$$(-1)^{n-1}(2\pi_i)^{-n}\bar{\partial}\theta = \bar{\partial}\alpha_2, \quad z \in D, \tag{5}$$

$\psi \in C^2_{(n,n-2)}(V \setminus D)$, так как, используя (2), свойство 4 вектор-функции $P(\zeta, z)$ и равенство $\bar{\partial}\alpha_2 = \rho^2\beta$, подынтегральное выражение в (4) и его первые и вторые производные можно оценить сверху по модулю функцией вида $C|\zeta - z|^{1-2n}$ и, следовательно, в (4) можно два раза дифференцировать под знаком интеграла. По теореме Уитни (см., например, ([8])), форму ψ можно продолжить в V с сохранением гладкости. Продолженную форму обозначим тоже ψ.

Покажем, что при $z \in V \setminus \bar{D}$, $\bar{\partial}\psi = \theta$. Из леммы 2 и только что отмеченных свойств интеграла (4) следует

$$\theta(z) = \int_D \bar{\partial}\alpha_2(\zeta) \wedge D_{n-1}(v, \bar{\partial}_z v) \wedge dz + \bar{\partial}\psi. \tag{6}$$

Но так как v и $\bar{\partial}_z v$ голоморфны по ζ на $\bar{D}$ (см. замечание после определения v) и $\alpha_2|_{\partial D} = \alpha$, из формулы Стокса и (1) следует, что интеграл в (6) равен нулю.

По непрерывности $\bar{\partial}\psi = \theta$ и при $z \in \partial D$. Отсюда и из (5) следует, что форма $\gamma = \alpha_2 - (-1)^{n-1}(2\pi i)^n(\theta - \bar{\partial}\psi)$ искомая.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Л. А. Айзенбергу за постановку задачи и внимание к работе.

Институт физики им. Л. В. Киренского
Сибирского отделения Академии наук СССР
Красноярск

Поступило
30 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1962. [2] B. M. Weinstok, Proc. Am. Math. Soc., **21**, № 2 (1969). [3] Л. А. Айзенберг, ДАН, **199**, № 2 (1971). [4] Г. М. Хенкин, Матем. сборн., **78**, № 4 (1969). [5] A. E. de Ramires, Math. Ann., **184** (1970). [6] W. Koppelman, Bull. Am. Math. Soc., **73**, № 3 (1967). [7] W. Koppelman, Bull. Am. Math. Soc., **73**, № 4 (1967). [8] Б. Мальгранж, Идеалы дифференцируемых функций, М., 1968.