Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 1

УДК 519.55 *МАТЕМАТИКА*

Н. Б. ЕНГИБАРЯН

О ФАКТОРИЗАЦИИ СИММЕТРИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 5 VIII 1971)

1. Проблеме факторизации интегральных и дифференциальных операторов посвящены многочисленные исследования. В работе ([1]) содержится большинство результатов по факторизации интегральных операторов, полученных как самими авторами книги, так и другими. В работе ([2]) факторизация оператора $D^2 - q(x)$ была применена к эффективному решению самосопряженной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка.

Применение принципа инвариантности Амбарцумяна (см. ([3])) к некоторым задачам теории переноса излучения привело автора к новому методу факторизации симметрических интегральных операторов внутри круга Фредгольма, применение которого позволяет одновременно решить семейство интегральных уравнений с различными верхними пределами интегрирования, сводя решение к некоторым функциональным уравнениям вольтерровского типа.

2. Рассмотрим уравнение с симметрическим ядром

$$f(x) - \int_{r_0}^{r} K(x, t) f(t)\, dt = g(x) \tag{1}$$

при значениях r: $r < r_1$, при которых уравнение имеет единственное решение.

Ядро $K(x, t)$ считается непрерывным при $x \neq t$ в квадрате $[r_0, r_1] \times [r_0, r_1]$, а при $x = t$ может иметь слабую особенность. Предполагается, что оно представлено в виде

$$\begin{gathered} K(x, t) = \int_a^b U(x, s) V(t, s)\, d\sigma(s) \quad \text{при} \quad x < t, \\ K(x, t) = K(t, x). \end{gathered} \tag{2}$$

Рассмотрим также уравнение со специальной правой частью

$$y(x, r, s) - \int_{r_0}^{r} K(x, t) y(t, r, s)\, dt = U(x, s), \tag{3}$$

в которой отмечена зависимость решения y от r и s.

Дифференцируя обе части уравнения (3) по r и сравнивая полученное уравнение для $\partial y / \partial r$ с уравнением (3), будем иметь

$$\partial y(x, r, s) / \partial r = \varphi(r, s) E(x, r), \tag{4}$$

где

$$\varphi(r, s) = y(r, r, s), \tag{5}$$

$$E(x, r) = \int_a^b y(x, r, s) V(r, s)\, d\sigma(s). \tag{6}$$

Введем функцию $W(p, s, r)$ по формуле

$$W(p, s, r) = \int_{r_0}^{r} y(x, r, s)\, U(x, p)\, dx, \tag{7}$$

имеем

$$W(p, s, r_0) = 0. \tag{8}$$

Из (4) можно получить соотношение между W и φ:

$$\frac{\partial W(p, s, r)}{\partial r} = \varphi(r, s)\left[U(r, p) + \int_a^b W(p, s', r)\, V(r, s')\, d\sigma(s')\right]. \tag{9}$$

С другой стороны, подставляя в (3) $x = r$, после небольших выкладок будем иметь

$$\varphi(r, s) = U(r, s) + \int_a^b W(s', s, r)\, V(r, s')\, d\sigma(s'). \tag{10}$$

Лемма 1. *При $r \in [r_0, r_1)$ система* (9), (10) *с условием* (8) *определяет единственную функцию W такую, что*

$$W(p, s, r) = W(s, p, r) = \int_{r_0}^{r} \varphi(r', s)\, \varphi(r', p)\, dr'. \tag{11}$$

На основании леммы 1 из (11) для определения функции $\varphi(r, s)$ получается уравнение Вольтерра

$$\varphi(r, s) = U(r, s) + \int_{r_0}^{r} \psi(r', r)\, \varphi(r', s)\, dr', \tag{12}$$

причем ядро $\psi(r', r)$, связанное с функцией $\varphi(r, s)$ соотношением

$$\psi(r, \rho) = \int_a^b \varphi(r, s)\, V(\rho, s)\, d\sigma(s), \quad \rho > r, \tag{13}$$

удовлетворяет уравнению

$$\psi(r, \rho) = K(r, \rho) + \int_{r_0}^{r} \psi(r', r)\, \psi(r', \rho)\, dr', \quad \rho > r, \tag{14}$$

представляющему функциональное уравнение вольтерровского типа. Уравнение (14) впервые было получено в работе автора ([4]) в частном случае $K(x, t) = E_i|x - t|$. Соотношение типа (14) фигурирует также в теории обратной задачи Штурма — Лиувилля.

Из (4) и (6) нетрудно получить уравнение Вольтерра для определения функции $E(x, r)$:

$$E(x, r) = \psi(x, r) + \int_x^r \psi(r', r)\, E(x, r')\, dr'. \tag{15}$$

3. Рассмотрение уравнения (1) с произвольной правой частью приводит нас к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть ядро $K(x, t)$ допускает представление* (2). *Тогда решение уравнения* (1) *дается формулой*

$$f(x) = \varphi^*(x) + \int_x^r E(x, r')\, \varphi^*(r')\, dr', \tag{16}$$

где $\varphi^*(x)$ *является решением уравнения Вольтерра*

$$\varphi^*(x) = g(x) + \int_{r_0}^{x} \psi(t, x) \varphi^*(t) dt. \tag{17}$$

Функции $\psi(x, r)$ *и* $E(x, r)$ *определяются из уравнений* (14) *и* (15) *соответственно.*

Важно, что представление (2) играет промежуточную роль и не фигурирует в окончательных результатах.

В операторной форме теорема 1 гласит

$$[1 - \mathscr{K}(x, r)]^{-1} = [1 + \mathscr{E}(x, r)][1 - \Psi(x)]^{-1}, \tag{18}$$

где операторы $\mathscr{K}(x, r)$, $\mathscr{E}(x, r)$ и $\Psi(x)$ суть

$$\mathscr{K}(x, r) f = \int_{r_0}^{r} K(x, t) f(t) dt,$$

$$\mathscr{E}(x, r) f = \int_{x}^{r} E(x, t) f(t) dt, \quad \Psi(x) f = \int_{r_0}^{x} \psi(t, x) f(t) dt.$$

Итак, определение из уравнения (14) функции ψ, зависящей от двух переменных, позволяет факторизовать оператор $[1 - \mathscr{K}(x, r)]^{-1}$ при любом $r \in [r_0, r_1)$ и тем самым свести решение семейства уравнений (1) к решению двух уравнений Вольтерра.

Методом вариации верхнего предела интегрирования различными авторами были получены важные результаты по теории уравнений Фредгольма. Основная часть этих результатов изложена в ([1]).

Отметим, что предложенный нами подход имеет некоторое методическое сходство с принципом оптимальности и методом инвариантного вложения Р. Беллмана.

4. Представляет определенный интерес рассмотрение того частного случая, когда ядро $K(x, t)$ имеет структуру

$$K(x, t) = \sum_{s=1}^{n} U_s(x) V_s(t) \quad \text{при} \quad x < t;$$

тогда уравнение (1) эквивалентно некоторой краевой задаче для канонической системы дифференциальных уравнений, а уравнение (14) легко преобразуется к задаче Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений. При $n = 1$ уравнение (14) сводится к уравнению Риккати (см. также ([2], [5])). Рассмотрение этого частного случая позволяет получить ряд результатов по факторизации канонических дифференциальных операторов.

Автор выражает глубокую благодарность акад. В. А. Амбарцумяну и акад. В. С. Владимирову за ценные обсуждения и советы.

Институт математики
Академии наук АрмССР

Поступило
30 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», 1967. [2] В. С. Владимиров, ПММ, **19**, 315 (1955). [3] В. А. Амбарцумян, Научные труды, **1**, Ереван, 1960. [4] Н. Б. Енгибарян, Астрофизика, **2**, 197 (1966). [5] Р. Беллман, Р. Калаба, Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи, М., 1968.