Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 1

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

В. М. ЗОЛОТАРЕВ

О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 6 VIII 1971)

Рассмотрим схему суммирования независимых и одинаково распределенных случайных величин, имеющих среднее значение 0 и дисперсию 1. Обозначим F — функцию распределения (ф.р.) отдельных слагаемых, Φ — ф.р. стандартного нормального закона и $F_n(x) = F^{n*}(x\sqrt{n})$ — ф.р. нормированной суммы n слагаемых. Изучение скорости сходимости F_n к Φ при $n \to \infty$ в равномерной метрике является задачей, давно уже ставшей классической. В настоящее время известно, что при всех $n \geqslant 1$

$$\rho(F_n, \Phi) = \sup_x |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant c\,\beta/\sqrt{n}, \tag{1}$$

где β — абсолютный третий момент ф.р. F и c — некоторая абсолютная постоянная.

Автор в работе [1] обратил внимание на то, что оценка типа (1) не учитывает степени близости F к Φ, поскольку $\beta \geqslant 1$, хотя такая близость, очевидно, имеет существенное значение. Это нетрудно заметить, принимая во внимание элементарное неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant n\rho(F, \Phi).$$

Какого типа оценки, обобщающие (1) в направлении учета степени близости F к Φ, мы могли бы ожидать, может подсказать асимптотическое представление при $n \to \infty$

$$\rho(F_n, \Phi) \sim \frac{|\alpha|}{3e\sqrt{2\pi e}}\, n^{-1/2},$$

где

$$\alpha = \int x^3\, dF = \int x^3 d(F - \Phi) = 3\int x^2 (\Phi - F)\, dx.$$

Замена величины $|\alpha|$ одной из соответствующих верхних оценок

$$\beta = \int |x|^3\, dF, \quad \nu = \int |x|^3\, |d(F - \Phi)|, \quad \varkappa = 3\int x^2 |F - \Phi|\, dx$$

дает нам возможные варианты гипотетических неравенств, первое из которых совпадает с (1), а другие два были бы его желательным обобщением.

В упомянутой работе [1] как следствие значительно более общего результата была получена оценка

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant c(\nu/\sqrt{n})^{1/4}, \tag{2}$$

которая отвечала бы высказанным пожеланиям, если бы удалось заменить показатель $1/4$ на 1. Этот результат удалось улучшить В. Паулаускасу [2], показавшему, что

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant c \max(\nu^{1/4}, \nu)\, n^{-1/2}. \tag{3}$$

Некоторое улучшение оценки (3) возможно за счет замены в этом неравенстве величины ν величиной $\varkappa$, что безусловно предпочтительнее, поскольку всегда $\varkappa \leqslant \nu$ (см. ([3])).

Получающееся неравенство ($n \geqslant 1$):

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant c \max(\varkappa^{1/4}, \varkappa) n^{-1/2}, \tag{4}$$

нельзя улучшить, заменив $^1/_4$ большим числом, по крайней мере при $n = 1$, подтверждением чему служит следующий несложный пример.

Выберем какое-либо число $\varepsilon > 0$ и определим число $\theta \in (0, 1)$ как решение уравнения

$$\int_0^\varepsilon x^2\, d\Phi = (\theta\varepsilon)^2 \int_0^\varepsilon d\Phi.$$

Симметричное распределение F определяем условиями

$$F(x) = \begin{cases} {}^1/_2 & \text{для} \quad 0 < x \leqslant \theta\varepsilon, \\ \Phi(\varepsilon) & \text{для} \quad \theta\varepsilon < x \leqslant \varepsilon, \\ \Phi(x) & \text{для} \quad x > \varepsilon. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что при малых значениях ε

$$\rho(F, \Phi) \asymp \varepsilon, \quad \varkappa \asymp \varepsilon^4.$$

Приведенный пример подсказывает следующую постановку задачи обобщения (4). Найти такую функцию $r(n)$, определенную для натуральных n, что

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant c \max(\varkappa^{r(n)}, \varkappa) n^{-1/2}, \tag{5}$$

и такую, что ни при каком значении $n \geqslant 1$ в неравенстве (5) нельзя заменить $r(n)$ большей величиной в общей ситуации.

На том же примере мы можем видеть, что

$$r(2) \leqslant {}^1/_2 \quad \text{и} \quad r(3) \leqslant {}^3/_4.$$

Вполне понятно, что любая нижняя оценка оптимальной функции $r(n)$ годится для использования в неравенстве (5).

Теорема 1. *Для всех* $n \geqslant 1$

$$r(n) \geqslant n \,/\, (3n + 1). \tag{6}$$

Эффект появления функции $r(n)$ в неравенстве (5) (как мы видели, заведомо не равной тождественно единице) отчасти можно объяснить потерей в $\varkappa$ информации о степени близости F к Φ в окрестности нуля, что происходит за счет обращения в нуль в этой точке весовой функции x^2. Отсюда напрашивается естественный вывод. Если x^2 заменить весовой функцией $\max(1, x^2)$, то это даст возможность увеличить то оптимальное значение $r(1) = {}^1/_4$, которое нам известно. Положим

$$\varkappa_0 = \int \max(1, x^2)\, |F - \Phi|\, dx$$

(очевидно, что $\varkappa_0 \geqslant \varkappa$).

Теорема 2. *Для всех* $n \geqslant 1$

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant c \max(\varkappa_0^{1/2}, \varkappa_0) n^{-1/2}. \tag{7}$$

Приведенный пример показывает, что при $n = 1$ показатель степени $^1/_2$ не может быть увеличен. Таким образом, хотя наше соображение и подтверждается, но не может быть единственным объяснением появления в (5) показателя, меньшего единицы. По-видимому, дело еще в том, что равномерная метрика ρ и средняя $\varkappa_0$ (которые, как известно, несравнимы) по-разному учитывают информацию о степени близости и структурном различии распределений F и Φ. В пользу такой точки зрения говорит следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{S} = \{F\}$ — множество распределений, определяемое условием (f — характеристическая функция распределения F)*

$$\int |f(t)|^m \, dt \leqslant k,$$

где m, k — некоторые положительные числа.

Тогда существует константа B, зависящая только от m и k, такая, что для всех $F \in \mathfrak{S}$ и любых целых $n \geqslant 1$

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant B\varkappa n^{-1/2}.$$

Естественно ожидать, что, если использовать вместо $\varkappa$, $\varkappa_0$ метрику, мажорирующую ρ, показатель, меньший единицы, должен исчезнуть и уступить место единице. Положим

$$\nu_0 = \int \max(1, x^2) \, |d(F - \Phi)|$$

(очевидно, что $\nu_0 \geqslant \varkappa_0, \nu_0 \geqslant \nu$).

Теорема 4. *Для всех $n \geqslant 1$*

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant c \max(-\nu_0 \log \nu_0, \nu_0) n^{-1/2}. \tag{8}$$

Появление здесь $\log \nu_0$, по-видимому, результат дефекта метода, поскольку в случае $n = 1$, когда эффект суммирования независимых слагаемых еще не проявляется, мы имеем, очевидно, $\rho(F_n, \Phi) \leqslant \nu_0$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
18 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Золотарев, Теория вероятностей и ее применения, 9, 3 (1965). [2] В. Паулаускас, Литовск. Матем. сборн., 9, 2 (1969). [3] В. М. Золотарев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 112, ч. 1 (1971).