Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 5

УДК 532.5.001.5 *ГИДРОМЕХАНИКА*

Е. С. ДЗЕКЦЕР

ОБОБЩЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРУНТОВЫХ ВОД СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 13 VII 1971)

Рассматривается движение грунтовых вод, описываемое уравнением Буссинеска [1-3]. Предлагается некоторое обобщение этого уравнения.

Введем потенциал скорости фильтрации

$$\varphi(x, y, z, t) = -kh(x, y, z, t) = -k(p/\gamma + z), \tag{1}$$

где $h(x, y, z, t)$ — напор, p — давление, γ — объемный вес жидкости. Поместим начало координат на горизонтальной плоскости водоупора и направим ось z вверх. Проекции скоростей фильтрации на оси координат

$$u = \partial\varphi/\partial x, \quad v = \partial\varphi/\partial y, \quad w = \partial\varphi/\partial z. \tag{2}$$

Тогда из уравнения неразрывности следует [2], что потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2 = 0. \tag{3}$$

Граничные условия будут: на свободной поверхности $z = H(x, y, t)$

$$\mu\frac{dH}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=H} + \varepsilon_a; \tag{4}$$

На водоупоре

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \varepsilon_0. \tag{5}$$

$H(x, y, t)$ — напор на свободной поверхности, равный мощности грунтового потока, ε_0 и ε_a — модули питания потока соответственно через его подошву и свободную поверхность, μ — коэффициент свободной пористости.

Интегрируем уравнение (3) по z в пределах от 0 до $H(x, y, t)$:

$$\int_0^H \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dz + \int_0^H \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dz + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_0^H = 0. \tag{6}$$

С учетом условия (4) величина $\partial\varphi/\partial z|_{z=H}$ может быть записана как

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=H} = \mu\frac{dH}{dt} - \varepsilon_a = \mu\left(\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right) - \varepsilon_a. \tag{7}$$

Произведем операцию дифференцирования по параметру для интегралов

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H \frac{\partial\varphi}{\partial x}dz = \int_0^H \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}dz + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bigg|_{z=H}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_0^H \frac{\partial\varphi}{\partial y}dz = \int_0^H \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}dz + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{z=H}. \tag{9}$$

Подставляя в (6) вместо стоящих там интегралов их выражения из (8) и (9) и принимая во внимание условия (5) и (7), а также, что $\mu\, dx/dt = \partial\varphi/\partial x$ и $\mu\, dy/dt = \partial\varphi/\partial y$, будем иметь

$$-\left[\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H \frac{\partial\varphi}{\partial x}dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_0^H \frac{\partial\varphi}{\partial y}dz\right] + \varepsilon_a + \varepsilon_0 = \mu\frac{\partial H}{\partial t}. \tag{10}$$

Уравнение (10) может быть получено также путем составления баланса массы для элементарного объема, включающего плоскости подошвы пласта и свободной поверхности. При этом потоки через боковые поверхности объема будут

$$q_x = \int_0^H \frac{\partial \varphi}{\partial x} dz, \quad q_y = \int_0^H \frac{\partial \varphi}{\partial y} dz. \tag{11}$$

Разложим функцию $\varphi(x, y, z, t)$ в ряд по степеням z:

$$\varphi(x, y, z, t) = \varphi_0(x, y, t) + z\varphi_1(x, y, t) + z^2\varphi_2(x, y, t) + \ldots \tag{12}$$

Для определения φ_0 и φ_1 используем граничные условия на подошве пласта

$$\partial\varphi / \partial z\,|_{z=0} = \varepsilon_0, \quad \varphi(x, y, 0, t) = \varphi_0. \tag{13}$$

Подставляя (12) в первое равенство (13), получим

$$\varphi_1 = \varepsilon_0. \tag{14}$$

Для определения φ_2 подставим φ в уравнение Лапласа (3) и примем в нем $z = 0$ и $\varphi_1 = \varepsilon_0$. Тогда получим

$$\varphi_2 = -{}^1/_2\,(\partial^2\varphi_0 / \partial x^2 + \partial^2\varphi_0 / \partial y^2). \tag{15}$$

Определение $\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_n$ производится таким же образом, но (3) предварительно дифференцируется по z. Тогда вместо (12) получим

$$\varphi(x, z, t) = \varphi_0 + \varepsilon_0 z + \sum_0^\infty (-1)^{n+1} \frac{z^{2n+2}}{(2n+2)!} \frac{\partial^{2n+2}\varphi_0}{\partial x^{2n+2}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Предполагается, что ряд (16) сходится (для этого нужно наложить ограничение на коэффициенты ряда).

Остановимся на первых трех членах выражения (16) и, принимая во внимание (1), придем к выражению

$$h(x, y, z, t) = h_0 - z\frac{\varepsilon_0}{k} - \frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2}\right), \tag{17}$$

где $h_0(x, y, t)$ — напор на подошве пласта.

Выражение (17) может быть получено и другим путем. Считая, что скорости $\partial\varphi / \partial x$ и $\partial\varphi / \partial y$ не зависят от z, из (3) получим

$$\varphi(x, y, z, t) = -\int_0^z\!\!\int_0^z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) d^2 z = -\frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_0}{\partial y^2}\right) + c_1 z + c_2, \tag{18}$$

где $c_1 = \varepsilon_0$, $c_2 = \varphi_0(x, y, 0, t)$, т. е. потенциал φ зависит от z, как это отмечалось Н. Н. Веригиным [4], по параболическому закону. Отсюда получаем

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial c_2}{\partial x} - \frac{z^2}{2}\left(\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x\,\partial y^2}\right). \tag{19}$$

Из (19) следует, что $\partial\varphi / \partial x$ зависит от z.

Выражение (18) совпадает с (16), если в последнем удержать только первых три члена.

Подставляя (17) в уравнение (10), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[H\frac{\partial h_0}{\partial x} - \frac{H^3}{6}\left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial x\,\partial y^2}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[H\frac{\partial h_0}{\partial y} - \frac{H^3}{6}\left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial y\,\partial x^2}\right)\right] = \frac{\mu}{k}\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{k}. \tag{20}$$

Приняв в (17) $z = H$, получим зависимость для определения напора на свободной поверхности

$$H = h_0 - \frac{\varepsilon_a}{k} H - \frac{\alpha}{2} H^2, \quad \alpha = \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2}\right). \tag{21}$$

Решим уравнение (21) относительно H:

$$H = \frac{1}{\alpha}\left(\sqrt{\beta^2 + 2\alpha h_0} - \beta\right), \quad \beta = \frac{\varepsilon_0}{k} + 1. \tag{22}$$

Разложим первый член (радикал) в (22), в ряд по степеням $2\alpha h_0$:

$$H = \frac{1}{\alpha}\left[-\beta + \beta + \frac{\alpha}{\beta} h_0 - \frac{\alpha}{2\beta^3} h_0^2 + \ldots\right] \approx \frac{h_0}{\beta} - \frac{h_0^2}{2\beta^3}\left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial y^2}\right)\cdot \tag{23}$$

Подставляя в (20) H из (23) и пренебрегая произведениями производных как величинами высшего порядка малости, получим

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{h_0^2\mu}{2\beta^2 k}\left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^2 \partial t} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial y^2 \partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[h_0 \frac{\partial h_0}{\partial x} - \frac{h_0^3}{6\beta^2}\left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial x\, \partial y^2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[h_0 \frac{\partial h_0}{\partial y} - \frac{h_0^3}{6\beta^2}\left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 h_0}{\partial y\, \partial x^2}\right)\right] + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{k}\beta. \tag{24}$$

Если в (24) пренебречь третьими и четвертыми производными и считать напор не зависимым от z, то получим уравнение Буссинеска.

Если линеаризовать уравнение (24), то для одномерного случая фильтрации будем иметь

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{k\bar{h}_0}{\mu}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h_0}{\partial x} - \frac{\bar{h}_0^2}{6\beta^2}\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^3}\right) + \frac{\bar{h}_0 \mu}{2\beta^2 k}\frac{\partial^3 h_0}{\partial x^2 \partial t}\right] + \frac{\varepsilon_0 + \varepsilon_a}{\mu}\beta, \tag{25}$$

где $\bar{h}_0$ — осредненный по t и x напор.

Для случая осесимметричной фильтрации обобщенное уравнение записывается при $\beta = 1$ и $\varepsilon_a = 0$ следующим образом:

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{k}{\mu r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r h_0 \frac{\partial h_0}{\partial r} - r\frac{h_0^3}{6}\left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial r^3} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial h_0}{\partial r}\right)\right)\right]\right\} + \frac{1}{2r} h_0^2 \frac{\partial^2}{\partial r\, \partial t}\left(r\frac{\partial h_0}{\partial r}\right), \tag{26}$$

или после линеаризации

$$\frac{\partial h_0}{\partial t} = \frac{k\bar{h}_0}{\mu r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial h_0}{\partial r} - r\frac{\bar{h}_0^2}{6}\left(\frac{\partial^3 h_0}{\partial r^3} + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial h_0}{\partial r}\right)\right)\right]\right\} + \frac{1}{2r} \bar{h}_0^2 \frac{\partial^2}{\partial r\, \partial t}\left(r\frac{\partial h_0}{\partial r}\right). \tag{27}$$

Определение положения свободной поверхности после получения $h_0(x, y, t)$ или $h_0(r, t)$ производится по зависимости (21), в которой для осесимметричной фильтрации принимается

$$\alpha = \left(\frac{\partial^2 h_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_0}{\partial r}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial h_0}{\partial r}\right).$$

Таким образом, получено уравнение, в котором учитывается изменение напора по вертикали.

Автор считает приятным долгом выразить благодарность Н. Н. Веригину за полезное обсуждение работы.

Производственный и научно-исследовательский институт инженерных изысканий в строительстве Госстроя СССР
Москва

Поступило
1 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Я. Полубаринова-Кочина, ПММ, **13**, в. 2 (1949). [2] П. Я. Полубаринова-Кочина, Теория движения грунтовых вод, М., 1952. [3] С. К. Абрамов, Н. Н. Биндеман и др., Влияние водохранилищ на гидрогеологические условия прилегающих территорий, 1960. [4] Н. Н. Веригин, Тр. НИИ ВОДГЕО. Инженерная гидрогеология, в. 22 (1969).