

М. И. ЗЕЛИКИН

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ С НЕПОЛНОЙ
ИНФОРМАЦИЕЙ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 5 VII 1971)

Рассмотрим следующую дифференциальную игру. Два объекта P и E могут передвигаться по окружности со скоростью, не превосходящей единицы. В начальный момент времени задано случайное равномерное распределение обоих объектов на окружности. Оба они ничего не знают о положении и действиях друг друга. Игрок P стремится «поймать» игрока E , т. е. игра считается законченной в момент t , если P и E окажутся в одной и той же точке окружности в этот момент.

Обозначим радиус окружности через R , а через φ , ψ — углы радиусов-векторов точек P и E с некоторым фиксированным лучом, проведенным через центр окружности.

Уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} &= u/R, \quad |u| \leq 1, \\ \dot{\psi} &= v/R, \quad |v| \leq 1.\end{aligned}\tag{1}$$

В дальнейшем удобно за стратегии P и E принять сами траектории этой системы, т. е. функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ соответственно, удовлетворяющие условию Липшица:

$$|\Delta\varphi| = |\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)| \leq |\Delta t|/R.\tag{2}$$

Такое же условие имеем для функции $\psi(t)$. Поскольку очевидно, что решений в чистых стратегиях для этой задачи нет, то каждый из игроков выбирает некоторую меру на пространстве функций вида (2), которая и будет его смешанной стратегией. После того как каждый из игроков выберет свою меру, можно вычислить математическое ожидание времени «поймки» при данных двух мерах на пространствах функций и при заданном вероятностном распределении начальных положений. В частности, оно может быть равно $+\infty$. Это математическое ожидание принимается за плату в данной игре.

Ставится вопрос об оптимальных стратегиях и о цене в данной игре. (Один из вариантов такой задачи под названием «Принцесса и чудовище» был поставлен Айзексом ⁽¹⁾, где предлагается, но не проводится идея сведения к дискретной игре с последующим предельным переходом).

В данной статье доказывается, что цена игры существует и равна $3/2\pi R$ и что она достигается на следующей паре оптимальных стратегий (одинаковых для обоих игроков): в момент времени $t = 0$ с вероятностью $1/2$ выбирается одно из двух возможных направлений движения и точка движется по этому направлению с максимальной скоростью в течение времени $t = \pi R$, которое мы назовем периодом, т. е. до прихода в диаметрально противоположную точку. Здесь вновь с вероятностью $1/2$ выбирается одно из двух возможных направлений и вновь происходит движение до диаметрально противоположной точки и т. д. Ясно, что нетрудно ввести меру в пространстве функций (2), отвечающую такому движению.

Докажем оптимальность этих стратегий. Пусть, например, P придерживается вышеописанной стратегии, а E выбирает произвольную допустимую стратегию. Мы покажем, что при этом плата постоянна (независимо от стратегии E) и равна $\frac{3}{2}\pi R$.

Лемма 1. Вероятность поимки за первый период равна $\frac{1}{2}$.

Изобразим наше движение графически, откладывая по оси абсцисс время, а по оси ординат длину проходимой дуги S . Точки оси ординат, отстоящие друг от друга на расстоянии $2\pi R$, будем считать тождественными. Положение P в момент $t=0$ примем за начало координат и проведем из концов

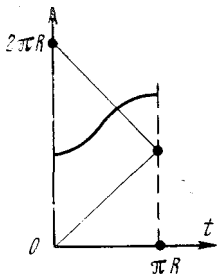


Рис. 1

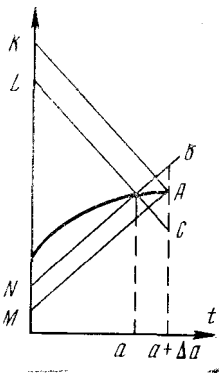


Рис. 2

отрезка $[0, 2\pi R]$, лежащего на оси ординат, две возможные траектории P : прямые с наклоном -1 и $+1$ соответственно (рис. 1). Рассмотрим сначала некоторую конкретную траекторию убегающего на отрезке времени $[0, \pi R]$. На рис. 1 она может быть изображена в виде кривой, удовлетворяющей условию Липшица с константой Липшица, равной 1, начинающейся в некоторой точке отрезка $[0, 2\pi R]$. Эта кривая пересечет только один из катетов изображенного на рис. 1 прямоугольного треугольника (или для одной точки отрезка придет в его вершину), так как она не может пересечь оба эти катета в силу выполнения условий Липшица. Тем самым (для всех начальных положений E на отрезке, кроме одного) выбор игроком P одного направления приводит к поимке в первом периоде, а выбор другого — к избеганию поимки в первом периоде; следовательно, при фиксированной траектории E и при фиксированном начальном положении E , кроме одного, вероятность поимки равна $\frac{1}{2}$. Значит, вероятность поимки при фиксированной траектории убегающего и при равномерном распределении его начального положения равна $\frac{1}{2}$. Возьмем теперь произвольную меру на пространстве функций (2). Так как для любой фиксированной функции вероятность поимки $\frac{1}{2}$, то и при этой мере вероятность тоже будет равна $\frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

Подсчитаем математическое ожидание времени поимки при условии, что поимка произойдет в первом периоде. Обозначим через x расстояние по дуге окружности от P до E , отсчитываемое против часовой стрелки. Через $\theta(x)$ обозначим время поимки, при этом считается, что траектория E фиксирована и начинается в точке x , а P выбирает направление, которое обеспечивает поимку в первом периоде.

Лемма 2. При фиксированной траектории E случайная величина $\theta(x)$ равномерно распределена на $[0, 2\pi R]$.

Действительно, как видно на рис. 2, $KL + MN = BC = 2\Delta a$ и $KM < 2\pi R$ при $a + \Delta a < \pi R$. Поэтому $\mu\{x: a \leq \theta(x) \leq a + \Delta a; a \geq 0; a + \Delta a \leq \pi R; 0 \leq x \leq 2\pi R\} = 2\Delta a$.

Так как начальное распределение равномерно, то лемма 1 доказана.

В качестве следствия леммы 1 имеем: математическое ожидание времени поимки при условии, что поимка произошла в первом периоде, равно

$\frac{1}{2}\pi R$. Поскольку эта величина не зависит от выбора траектории E , то и при любой мере на пространстве его траекторий математическое ожидание времени поимки равно $\frac{1}{2}\pi R$.

Подсчитаем безусловное математическое ожидание времени поимки. Заметим сначала, что вероятность поимки во втором периоде равна $\frac{1}{4}$, в третьем $\frac{1}{8}$ и т. д.; математическое ожидание времени поимки при условии, что поимка происходит во втором периоде, равно $\pi R + \frac{1}{2}\pi R$, в третьем — $2\pi R + \frac{1}{2}\pi R$ и т. д.

Действительно, в случае если поимка в первом периоде не произошла, вероятностное распределение взаимного положения P и E остается равномерным в момент времени $t = \pi R$, и мы можем для второго периода провести точно те же рассуждения, что и для первого. По формуле полной вероятности имеем

$$MT = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi R) + \frac{1}{4}(\pi R + \frac{1}{2}\pi R) + \frac{1}{8}(2\pi R + \frac{1}{2}\pi R) + \dots = \frac{3}{2}\pi R.$$

Число $\frac{3}{2}\pi R$ является ценой игры, так как если, наоборот, E выберет теперь вышеописанную стратегию, а P — любую допустимую, то в силу полной симметрии получим то же самое.

Результат обобщается на случай, когда игра считается законченной, если расстояние между P и E станет меньше или равно ε . Оптимальные стратегии остаются теми же, только переключение происходит при $t = \pi R - \varepsilon$. Цена игры оказывается равной $\frac{3}{2}(\pi R - \varepsilon)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Айзекс, Дифференциальные игры, М., 1967.