

Г. П. ЧИСТЯКОВ

О ПРИНАДЛЕЖНОСТИ КЛАССУ I_0 ЗАКОНОВ С НЕАНАЛИТИЧЕСКИМИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 22 IV 1971)

Условимся считать все рассматриваемые в дальнейшем меры и заряды вполне конечными и определенными на классе борелевских множеств в R^n , а все множества в R^n — борелевскими. Множество B будем называть носителем заряда μ , если $\mu(E) = 0$ для любого E такого, что $E \cap B = \emptyset$. Будем говорить, что множество B является множеством с линейно независимыми точками, если для любого конечного набора векторов

$y_1, y_2, \dots, y_m \in B$ из равенства $\sum_{j=1}^m h_j y_j = 0$, где h_j — целые числа, следует $h_1 = h_2 = \dots = h_m = 0$.

В настоящей работе рассматриваются n -мерные безгранично делимые законы (б.д.з.) P с характеристическими функциями вида

$$\varphi(t; P) = \exp \left\{ i(a; t) + \int (e^{it(x)} - 1) dv \right\}, \quad t \in R^n, \quad (1)$$

где $a \in R^n$, а носитель B меры ν является множеством с линейно независимыми точками.

Д. А. Райков ⁽¹⁾ рассматривал законы с характеристической функцией вида (1) в случае $n = 1$ и доказал, что они принадлежат I_0 , если множество $B \subset (0, \infty)$ конечно. И. В. Островский ⁽²⁾ установил, что это утверждение сохраняет силу и в n -мерном случае, причем от множества $B \subset \{x = (x_1, \dots, x_n): x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ можно требовать, чтобы оно было ограниченным. Далее, Р. Куппенс ⁽³⁾, применив метод Рамачандрана ⁽⁴⁾, показал, что предположение об ограниченности множества $B \subset \{x: x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$ можно опустить. Позднее ⁽⁵⁾ он анонсировал без доказательства следующий результат.

Теорема 1. Если P — б.д.з. в R^n , характеристическая функция $\varphi(t)$ которого допускает представление (1), где мера ν обладает свойствами

1) для некоторого $r \neq 0, r \in R^n$, выполняется $\int e^{(r, x)} dv < \infty$.

2) $\inf_{r \in R^n} \int e^{(r, x)} dv < \ln 2$,

то $P \in I_0$.

С этими результатами связана одна теорема И. В. Островского ⁽⁶⁾.

Условие 1 в теореме Р. Куппенса обеспечивает аналитичность характеристической функции $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_n)$ по крайней мере по одной из переменных t_j , и это существенно облегчает исследование. В настоящей работе мы покажем, что от этого условия можно освободиться. Нами будет доказана

Теорема А. Если характеристическая функция $\varphi(t)$ n -мерного б.д.з. P допускает представление (1), где мера ν обладает свойством

$$\inf_{r \in R^n} \int e^{(r, x)} dv < \ln 2 \quad (2)$$

и ее носитель B является множеством с линейно независимыми точками, то $P \in I_0$.

В частности, если в представлении (1) мера ν такова, что ее носитель является множеством с линейно независимыми точками и $\nu(R^n) < \ln 2$, то $P \in I_0$.

В работе (1) Д. А. Райков поставил вопрос о существовании в классе I_0 законов с нецелыми или даже вообще неаналитическими характеристическими функциями. Из теоремы 1 Р. Куппенса следует, что существуют законы в I_0 с характеристическими функциями, аналитическими в полосе $\{0 < \operatorname{Im} t < \varepsilon t\}$, $t \in C^1$, и не продолжающимися аналитически ни в какую более широкую область. Из нашей теоремы следует существование в классе I_0 законов с характеристическими функциями, не продолжающимися аналитически с вещественной оси ни в какую область комплексной плоскости. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть б.д.з. P , удовлетворяющий условиям теоремы А, у которого характеристическая функция имеет вид

$$\varphi(t) = \exp \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_1^k (e^{ib_{k1}t} - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_2^k}{b_{k2}} (e^{-ib_{k2}t} - 1) \right\}, \quad t \in R^1,$$

где $0 < a_j < 1$, $b_{kj} = b^k + \varepsilon_{kj}$, $b = 2l + 1$, l — целое, $a_j b > 1 + 3\pi/2$, $j = 1, 2$; $a_1/(1 - a_1) + 2a_2/(b - a_2) < \ln 2$, числа ε_{kj} , $|\varepsilon_{kj}| < (2a_j b)^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$, $j = 1, 2$, такие, что $\{b_{k1}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{-b_{k2}\}_{k=1}^{\infty}$ — множество с линейно независимыми точками. Аналогичное утверждение верно для n -мерных законов из I_0 .

Для доказательства теоремы А будут использованы некоторые идеи Рамачандрана — Куппенса и следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $\varphi(u, t)$, $u \in R^1$, $t \in R^n$, — характеристическая функция $n + 1$ переменных u, t , причем функция $\varphi(u, 0)$ является целой по переменной u , тогда для любого фиксированного $t \in R^n$ функция $\varphi(u, t)$ является целой по переменной u функцией u справедлива оценка

$$\max_{|u|=T} |\varphi(u, t)| \leq \max \{ \varphi(iT, 0), \varphi(-iT, 0) \}, \quad t \in R^n.$$

Доказательство. По определению характеристической функции $\varphi(u, t)$, она допускает представление

$$\varphi(u, t) = \int_{R^1} \int_{R^n} e^{iux+i(t, y)} dP, \quad x \in R^1, \quad y \in R^n,$$

где P — закон в R^{n+1} . Тогда $\varphi(u, 0)$ имеет вид

$$\varphi(u, 0) = \int_{R^1} e^{iux} dP_1,$$

где $P_1 = \int_{-\infty}^x dP$. Поскольку по условию леммы функция $\varphi(u, 0)$ — целая, то по теореме Д. А. Райкова ((7), стр. 58)

$$\int_{R^1} e^{|u| \cdot |x|} dP_1 < \infty, \quad u \in C^1. \quad (3)$$

Рассмотрим интеграл

$$I(u, t) = \int_{R^1} \int_{R^n} e^{iux+i(t, y)} dP$$

для любого фиксированного $t \in R^n$ и любого $u \in C^1$. В силу (3) интеграл $I(u, t)$ абсолютно сходится и имеет место оценка

$$|I(u, t)| \leq \int_{R^1} e^{-\operatorname{Im} u \cdot x} dP_1 < \infty, \quad u \in C^1.$$

Таким образом, $I(u, t)$ представляет целую функцию по u при фиксированном $t \in R^n$ и при этом справедлива оценка

$$\max_{|u|=T} |I(u, t)| \leq \max \{ \varphi(iT, 0), \varphi(-iT, 0) \}.$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 2. (⁽⁸⁾, стр. 334). Пусть $f(u)$ — целая периодическая с периодом 2π функция, допускающая оценку

$$\max_{|u|=T} |f(u)| = O(e^{LT}) \quad (L > 0),$$

тогда $f(u)$ имеет вид $f(u) = \sum_{k=-[L]}^{k=[L]} c_k e^{iku}$, где c_k — постоянные.

Лемма 3. (Каратеодори, (⁹), стр. 28). Для всякой функции $f(u)$, голоморфной в круге $|u| \leq T$, справедливо неравенство

$$\max_{|u|=r} |f(u)| \leq \left\{ \max_{|u|=T} \operatorname{Re} f(u) - \operatorname{Re} f(0) \right\} \frac{2r}{T-r} + |f(0)| \quad (r < T).$$

Доказательство теоремы А. Заметим, что $\inf$ в (2) можно считать достигающимся при $r=0$, т. е. выполняется $v(R^n) < \ln 2$. Общий случай сводится к этому известным приемом (см., например, (⁶)).

Как известно, если характеристическая функция закона P имеет вид (1), где v удовлетворяет условию $v(R^n) < \ln 2$, то всякий ее делитель имеет вид

$$g_j(t) = \exp \{i(b_j, t) + \int (e^{i(t, x)} - 1) d\mu_j\}, \quad j = 1, 2,$$

где $b_j \in R^n$, а μ_j — заряд, для носителя $S(\mu_j)$ которого выполняется включение $S(\mu_j) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (k)B$. Множество $(k)B$, по определению, есть $\{x: x = x_1 + \dots + x_k, x_1, \dots, x_k \in B\}$. Следуя Рамачандрани — Куппенсу, рассмотрим сужение μ_{mj} заряда μ_j на множестве $(m)B$, $m = 1, 2, \dots$. Положим

$$\psi(t) = \int e^{i(t, x)} dv, \quad \psi_{mj}(t) = \int_{(m)B} e^{i(t, x)} d\mu_{mj} = \int e^{i(t, x)} d\mu,$$

$$m = 1, 2, \dots; j = 1, 2.$$

Заметим, что

$$\psi_{11}(t) + \psi_{12}(t) = \psi(t), \quad \psi_{m1}(t) + \psi_{m2}(t) = 0, \quad m \geq 2. \quad (4)$$

Так как B — множество с линейно независимыми точками, то множества $(m)B$, $m = 1, 2, \dots$, попарно не пересекаются и справедливо равенство

$$\ln g_j(t) = i(b_j, t) + \sum_{m=1}^{\infty} (\psi_{mj}(t) - \psi_{mj}(0)).$$

Поскольку функция $g_j(t)$ является характеристической, то существует закон G_j такой, что

$$\exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (\psi_{mj}(t) - \psi_{mj}(0)) \right\} = \int e^{i(t, x)} dG_j.$$

Отсюда следует, что справедливо соотношение

$$c_j \int e^{i(t, x)} dG_j = \sum \frac{1}{k_1! \dots k_p!} (\psi_{1j}(t))^{k_1} \dots (\psi_{pj}(t))^{k_p}, \quad c_j = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{mj}(0) \right\},$$

откуда

$$c_j G_j = \sum \frac{1}{k_1! \dots k_p!} \mu_{1j}^{k_1*} * \dots * \mu_{pj}^{k_p*}.$$

Так как носитель заряда $\mu_{1j}^{k_1*} * \dots * \mu_{pj}^{k_p*}$ лежит на множестве $(k_1 + \dots + p k_p)B$, а множества $(m)B$ попарно не пересекаются, то

$$c_j \int_{(m)B} e^{i(t, x)} dG_j = \sum_{k_1 + \dots + p k_p = m} \frac{1}{k_1! \dots k_p!} (\psi_{1j}(t))^{k_1} \dots (\psi_{pj}(t))^{k_p}, \quad (5)$$

Отсюда видно, что μ_{1j} — мера. Кроме того, правая часть (5) является коэф-

фактором при e^{imu} в разложении

$$\exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} e^{imu} \psi_{mj}(t) \right\}, \quad j = 1, 2,$$

поэтому функция

$$\varphi_j(u, t) = \exp \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (e^{imu} \psi_{mj}(t) - \psi_{mj}(0)) \right\} \quad (6)$$

является характеристической функцией переменных $u \in R^1$, $t \in R^n$. Из (4) видно, что для всех $u \in R^1$, $t \in R^n$ справедливо соотношение

$$\varphi_1(u, t) \cdot \varphi_2(u, t) = \exp \{ e^{iu} \psi(t) - \psi(0) \} = \varphi(u, t). \quad (7)$$

Соотношение (7) справедливо, в частности, и для $t=0$. Функции $\varphi_j(u, 0)$, $j=1, 2$, — характеристические. Так как $\varphi(u, 0)$ — целая по u , то по теореме Д. А. Райкова ((7), стр. 69) функции $\varphi_j(u, 0)$, $j=1, 2$, продолжают по переменной u как целые в комплексную плоскость и для них ((7), стр. 73) имеет место неравенство

$$\varphi_j(\pm iT(0)) \leq e^{\gamma_j T} \max_{|u|=T} |\varphi(u, 0)|.$$

Поэтому верна оценка

$$\ln \max_{|u|=T} |\varphi_j(u, 0)| = O(e^T), \quad j = 1, 2. \quad (8)$$

Применяя лемму 1 и оценку (8), получаем, что для любого фиксированного $t \in R^n$ функции $\varphi_j(u, t)$, $j=1, 2$, продолжают по u в комплексную плоскость как целые и справедливы соотношения

$$\ln \max_{|u|=T} |\varphi_j(u, t)| = O(e^T), \quad j = 1, 2. \quad (9)$$

Поскольку функции $\varphi_j(u, t)$ удовлетворяют при каждом фиксированном $t \in R^n$ соотношению (7), то они без нулей по u , и, следовательно, $\ln \varphi_j(u, t)$ тоже целые по u . Если учесть оценку (9) и то, что

$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi_{mj}(t)| < C < \infty$, $t \in R^n$, то, применяя к функциям $\ln \varphi_j(u, t)$, $j=1, 2$, лемму 3 ($r = |u|$, $T = \frac{3}{2}r$), получаем

$$\max_{|u|=r} |\ln \varphi_j(u, t)| = O(e^{\frac{3}{2}r}). \quad (10)$$

Из (6) видно, что функции $\ln \varphi_j(u, t)$, $j=1, 2$, периодические по u с периодом 2π . Учитывая оценку (10), замечаем, что к $\ln \varphi_j(u, t)$ применима лемма 2 ($L = \frac{3}{2}$), по которой $\ln \varphi_j(u, t)$, $j=1, 2$, имеют вид

$$\ln \varphi_j(u, t) = c_{-1j}(t) e^{-iu} + c_{0j}(t) + c_{1j}(t) e^{iu}. \quad (11)$$

Сравнивая представления (6) и (11), видим, что

$$\psi_{mj}(t) = 0, \quad m \geq 2, \quad j = 1, 2, \quad t \in R^n.$$

Отсюда следует утверждение теоремы А.

В заключение автор выражает глубокую благодарность И. В. Островскому за предложенную задачу и внимание к работе.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
20 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Д. А. Райков, Изв. АН СССР, сер. матем., 2, 91 (1938). ² И. В. Островский, Вестник Харьковск. гос. унив., 32, № 14, 51 (1966). ³ R. Currens, Zs. Wahrscheinlichkeitstheorie Geb., 15, 144 (1970). ⁴ B. Ramachandran, Advanced Theory of Characteristic Functions, Calcutta, 1967. ⁵ R. Currens, C. R., 270, № 18, A1182 (1970). ⁶ И. В. Островский, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 4, 223 (1970). ⁷ Ю. В. Линник, Разложения вероятностных законов, Л., 1960. ⁸ А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, 2, М., 1968. ⁹ Б. Я. Левин, Распределение корней целых функций, М., 1956.