

С. И. КОНЯЕВ, Ю. Н. СМЕРНОВ

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ
УРАВНЕНИЯ УИТТЕКЕРА

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 5 IV 1971)

Решение многих практически важных задач теории колебаний сводится к исследованию линейного дифференциального уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами

$$\partial^2 y / d\xi^2 + g(\xi)y = 0. \quad (1)$$

Здесь $g(\xi) = a - 2q\psi(\xi)$, причем $\psi(\xi)$ — периодическая функция ξ с периодом T ; a и q — произвольные вещественные постоянные; ξ — вещественная переменная. Важнейшим при исследовании уравнения типа (1) является выяснение для него диаграммы устойчивости решений $y(\xi)$ при изменении параметров уравнения, а также особенностей поведения характеристического показателя μ в зонах устойчивости и неустойчивости решений $y(\xi)$. Для простейшего случая уравнения (1), когда $g(\xi) = a - 2q \cos 2\xi$ (уравнение Матье) и $g(\xi) = (a - 2q \cos 2\xi)^2$, построены линии, разграничивающие зоны устойчивости и неустойчивости решений $y(\xi)$ в широком интервале изменения параметров a и q (^{1, 2}). Для уравнения Матье найдены линии равного значения μ в нескольких первых зонах устойчивости и неустойчивости (^{1, 3}).

Некоторая информация встречается в литературе и для других конкретных случаев $g(\xi)$, интересных в практических приложениях (см., например, (⁴)).

При анализе колебательных процессов, описываемых уравнением (1), как правило, с самого начала упрощают задачу, полагая $\psi(\xi) = \cos 2\xi$ или же считая параметры уравнения (1) малыми (за исключением a). В этом смысле исследование уравнения (1) с более сложным видом функции $\psi(\xi)$ без допущения о малости входящих в нее параметров представляет не только математический интерес, но и позволяет расширить сведения об особенностях поведения реальных колебательных систем.

С помощью ЭВМ способом, изложенным в (⁶), нами исследовано поведение зон устойчивости и неустойчивости решений $y(\xi)$ для уравнения

$$d^2 y / d\xi^2 + (a_0 - a_2 \cos 2\xi - a_4 \cos 4\xi)y = 0, \quad (2)$$

получившего в литературе (⁵) название уравнения Уиттекера. Для этого же уравнения построены линии равного значения μ в нескольких первых зонах диаграммы устойчивости. Исследование проведено при положительных значениях вещественных параметров a_0 , a_2 и a_4 . Как обычно, под характеристическим показателем μ понимается показатель экспоненты в общем решении уравнения (1), записанного в форме Флоке ($\mu \neq 0$):

$$y(\xi) = A_1 e^{\mu \xi} f_1(\xi) + A_2 e^{-\mu \xi} f_2(\xi),$$

где A_1 и A_2 — произвольные постоянные, $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ — периодические функции ξ с периодом T .

При $a_4 = 0$ уравнение Уиттекера (2) переходит, очевидно, в уравнение Матье. Таким образом, на плоскости параметров (a_0, a_2) зоны устойчивости и неустойчивости решений уравнения Уиттекера представляют известную диаграмму Айнса — Стретта (^{1, 3}) в координатах $a = a_0$ и $q =$

$= a_2/2$. Зоны неустойчивости будут начинаться на оси a_0 в точках $a_0 = n^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Если же положить $a_2 = 0$, уравнение Уиттекера также переходит в уравнение Маттье. Действительно, вводя новую переменную $t = 2\xi$, при $a_2 = 0$ получим

$$d^2y/dt^2 + (1/4a_0 - 1/4a_4 \cos 2t)y = 0. \quad (3)$$

Следовательно, на плоскости параметров (a_0, a_4) зоны устойчивости и неустойчивости решений уравнения (3) образуют диаграмму Айнса — Стретта, но уже в координатах $a = a_c/4$ и $q = a_4/8$. Зоны неустойчиво-

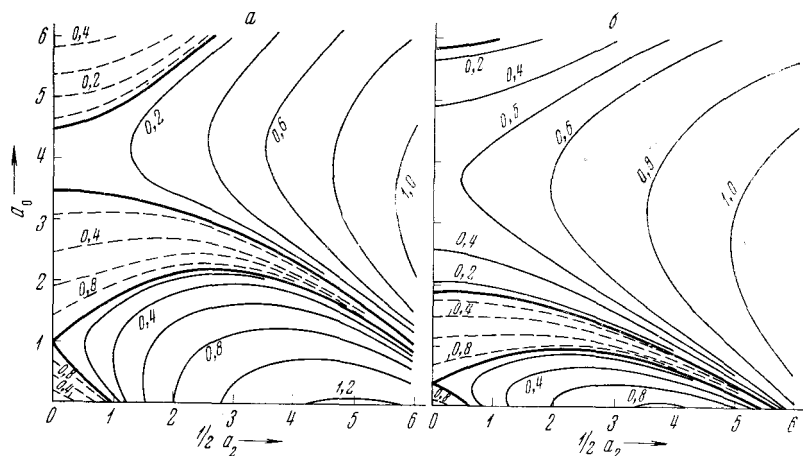


Рис. 1. Линии равного значения μ в зонах устойчивости (штриховые) и неустойчивости (сплошные линии) при $a_4 = 1$ (а) и 4 (б)

сти, как и в предыдущем случае, начинаются на оси a_0 , однако при значениях $a_0 = (2n)^2$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Таким образом, каждая зона неустойчивости решений уравнения Уиттекера, лежащая в плоскости (a_0, a_4) , имеет общую точку на оси a_0 с соответствующей четной зоной неустойчивости,

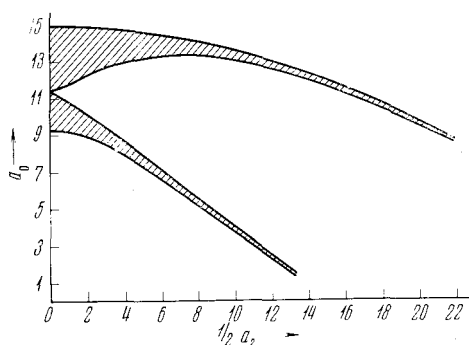


Рис. 2. Чередование зон устойчивости (заштрихованы) и неустойчивости. $0 \leq a_0 \leq 15$, $a_4 = 15$

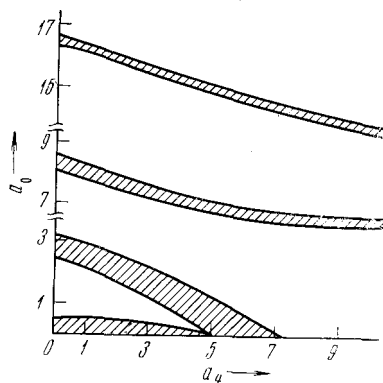


Рис. 3. Эволюция зон устойчивости (заштрихованы) и неустойчивости в сечении $a_0 = 1/2 a_2$

расположенной в плоскости (a_0, a_2) . Эти два предельных случая ($a_2 = 0$ и $a_4 = 0$), а также результаты расчетов ^(2, 6) были использованы для контроля составленных нами программ для уравнения Уиттекера (2) *.

* В ⁽⁶⁾ вкралась неточность: в четных зонах устойчивости, начинающихся на оси a_0 в интервалах $1 < a_0 < 4$, $9 < a_0 < 16$, вместо характеристических показателей μ , приведенных для этих зон в таблицах ⁽⁶⁾, должны браться значения $1 - \mu$. Аналогичная поправка должна быть внесена также и в ⁽¹⁾.

Выполненные расчеты показывают (рис. 1, 2), что в сечениях $a_4 = \text{const}$ по мере возрастания параметра a_4 от нулевого значения нечетные зоны неустойчивости деформируются, заканчиваясь, однако, на оси a_0 . Четные зоны неустойчивости, начало которых определяется точками $a_0 = (2n)^2$ при $a_4 = 0$, в плоскости $a_4 = \text{const}$ выходит за ось a_0 , как это и следует из уравнения (3). Видно, что уже при незначительных величинах a_4 , даже если глубина модуляции $h \equiv q/a = a_2/(2a_0)$ мала, характеристический показатель μ_{max} во второй зоне неустойчивости заметно превосходит μ_{max} в первой зоне (при одном и том же значении h). На языке теории параметрического резонанса это означает, что, если $a_4 \neq 0$, главная роль уже не может отводиться тону параметрических колебаний, соответствующему первой зоне неустойчивости (см. также (3)). Определяющее значение в этом случае приобретают резонансы, соответствующие четным зонам неустойчивости в сечениях $a_4 = \text{const}$.

Эволюция зон с увеличением a_4 хорошо прослеживается на рис. 3, который представляет сечение, проходящее через ось a_4 при условии $a_0 = 1/2 a_2$.

Полученные результаты остаются в силе для уравнения Уиттекера (2) с a_2 и $a_4 < 0$, но $a_0 > 0$ (1), так как график функции $g(\xi)$ в этом случае симметричен относительно начала координат и эта функция периодична,

$$\text{причем } \int_0^{2\pi} g(\xi) d\xi = 0.$$

Поступило
22 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ N. W. McLachlan. Theory and Application of Mathieu Function, N. Y., 1964; Н. В. Мак-Лаклан, Теория и приложения функций Матье, М., 1953. ² Ю. Н. Смирнов, Д. А. Франк-Каменецкий, ДАН, 174, № 6, 1309 (1967). ³ Ю. Н. Смирнов, ДАН, 178, № 3, 546 (1968). ⁴ В. В. Белецкий, Движение искусственного спутника относительно центра масс, М., 1965, стр. 100. ⁵ F. M. Arscott, Periodic Differential Equations, 1964. ⁶ Т. Д. Кузнецова, Ю. Н. Смирнов, Таблицы характеристических показателей для уравнения Матье, М., 1969.