

УДК 513.838

МАТЕМАТИКА

О. В. МАНТУРОВ

К ТЕОРИИ ВЕКТОРНЫХ РАССЛОЕНИЙ НАД КОМПАКТНЫМИ ОДНОРОДНЫМИ ПРОСТРАНСТВАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 8 VII 1971)

1. Целью работы является исследование однородных пространств G/H компактных групп Ли методами K -теории, теории представлений, спектральных последовательностей когомологий.

Мы рассматриваем две простые конструкции A и B в терминах теории представлений, позволяющие получать элементы из $K^*(G/H)$ в виде геометрических векторных расслоений над G/H ($K^0(G/H)$) и надстройкой SG/H ($K^1(G/H)$). (Речь пойдет, в основном, о комплексном K -функторе.) Вместе с этими построениями можно получить характеры Черна конструируемых пучков, как это сделано в (6).

Основным результатом является теорема, устанавливающая, что для пространств G/H из некоторого класса в кольце $K^*(G/H) \otimes Q$ (Q — рациональные числа) имеется система образующих, полученных с помощью конструкций A и B .

2. Описание конструкций A и B . Конструкция A . Пусть $X = G/H$. Рассмотрим в кольце представлений $R(G)$ группы G некоторый элемент Θ , обладающий свойством, что ограничение его на подгруппу H дает нулевой элемент в кольце представлений $R(H)$. Определим

$$f(\Theta): G/H \rightarrow U(n), \quad (1)$$

полагая

$$f(\Theta)gH = \Phi(g)\Psi^{-1}(g), \quad (2)$$

где $\Theta = \Phi - \Psi$; Φ, Ψ — геометрические (невиртуальные) представления размерности n . $\Psi^{-1}(g)$ означает матрицу, обратную к $\Psi(g)$. Отображение $f(\Theta)$ определено корректно и, по общей схеме, определяет элемент из $K^1(G/H)$ (3). Обозначим полученное нульмерное векторное виртуальное расслоение над SG/H через $\gamma(f(\Theta))$.

Конструкция B . Пусть $X = G/H$. Рассмотрим некоторое представление Φ размерности N группы G , обладающее свойством, что ограничение этого представления на подгруппу H является приводимым представлением группы H . Пусть l — инвариантное пространство (размерности n) представления $\Phi(H)$.

Определим отображение

$$f(\Phi, l): G/H \rightarrow G_{N, n}, \quad (3)$$

положив

$$f(\Phi, l)gH = \Phi(g)l. \quad (4)$$

Отображение (3) определено корректно. Обозначим элемент из $K^0(X)$ заданный этим отображением, через $\delta(\Phi, l)$.

3. Однородные пространства нормального положения и нормального типа. Пусть G/H — однородное пространство с компактной связной G ранга R и связной замкнутой H ранга r ; $J_{S(G)}$, $J_{S(H)}$ означают алгебры полиномов, инвариантных относительно группы Вейля на картановских подалгебрах групп G и H . Пусть ρ^* — отображе-

ние $J_{S(G)} \rightarrow J_{S(H)}$, соответствующее вложению $\varphi: H \rightarrow G$ ⁽⁵⁾. Если в $J_{S(\gamma)}$ существуют R производящих алгебраически независимых полиномов $P_1, P_2, \dots, P_R$ таких, что $\rho^*(P_{r+1}), \rho^*(P_{r+2}), \dots, \rho^*(P_R)$ принадлежит идеалу в $J_{S(H)}$, порожденному $\rho^*(P_1), \rho^*(P_2), \dots, \rho^*(P_r)$, то G/H называется однородным пространством нормального положения ^(1, 2, 4); если ρ^*P_i , $i = r+1, r+2, \dots, R$, суть полиномы от ρ^*P_j , $j = 1, 2, \dots, r$, то G/H называется пространством нормального типа.

4. В этом пункте излагается первая часть основного результата.

Теорема 1. Пусть G/H — пространство нормального типа, $RkH = r$, $RkG = R$.

Тогда существует $R - r$ нульмерных представлений Θ_i , $i = 1, 2, \dots, R - r$, групп $\bar{G}_i$, накрывающих G таких, что для некоторых натуральных m_i корректно определены отображения

$$f^{m_i}(\Theta): G \rightarrow U, \quad f^{m_i}(\Theta) \bar{g} = \underbrace{f(\Theta) \bar{g} \cdot f(\Theta) \bar{g} \dots f(\Theta) \bar{g}}_{m_i \text{ раз}}, \quad \bar{g} \in \bar{G}_i. \quad (5)$$

и $\gamma[f^{m_i}(\Theta_i)]$, $i = 1, 2, \dots, R - r$, составляет ту часть системы образующих $K^*(G/H) \otimes Q$, которая принадлежит $K^1(G/H) \otimes Q$.

5. В этом пункте излагается вторая часть основного результата — построения образующих элементов кольца $K^*(G/H) \otimes Q$, принадлежащих $K^0(G/H)$, с помощью конструкции B .

Пусть Φ — представление компактной связной группы G , Φ_i , $i = 1, 2, \dots, s$, — полный набор его неприводимых нетривиальных компонент, $\dim \Phi_i = n_i$. Обозначим через $V(\Phi(G))$ линейную группу

$\sum_{i=1}^s U(n_i)$. Для всякой компактной связной G существует локально точ-

ное представление Ψ такое, что группа $\Psi(G)$ за вычетом всех одномерных тривиальных представлений, содержащихся в ней, вполне негомологична нулю в $V(\Psi(G)) = U(n_1) + \dots + U(n_s)$.

Пусть H — замкнутая связная подгруппа G и $h = h_1 + h_2 + \dots + h_l + h_{l+1}$ — разложение алгебры Ли h группы H в сумму простых некоммутативных алгебр $h_1, h_2, \dots, h_l$ и коммутативной h_{l+1} . Имеет место

Теорема 2. При некотором наборе натуральных чисел $(p_1, \dots, p_s)$ представление $\Psi^{p_1} + \dots + \Psi^{p_s}$ группы H содержит локально точное представление группы H

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_l + \Gamma_{l+1}$$

такое, что

1) линейная группа $\Gamma_i(H/\text{Ker } \Gamma_i(H))$ вполне негомологична нулю в $V(\Gamma_i(H/\text{Ker } \Gamma_i(H)))$;

2) соответствующее представление $\bar{\Gamma}_i$ алгебры h обладает свойством: $\bar{\Gamma}_i(h_j)$, $i, j = 1, 2, \dots, l$, нетривиально тогда и только тогда, когда $i = j$;

3) $\Gamma_{l+1}(H)$ — коммутативная линейная группа (возможно, тривиальная; в этом случае полагаем $\Gamma = \Gamma_1 + \dots + \Gamma_l$).

$$\text{Обозначим } V^{(p_1 \dots p_s)} = \sum_{i=1}^s V^{(p_i)}, \quad V^{(p)} = \sum_{q_1 + \dots + q_p = p} \prod_{q_i=1}^{p_i} U(\prod_j n_j^{q_j}), \quad q_j \geq 0.$$

Используя утверждения теоремы, рассмотрим расслоения

$$G/H \xrightarrow{\pi} \frac{\Psi^{p_1} + \dots + \Psi^{p_s}(G)}{\Psi^{p_1} + \dots + \Psi^{p_s}(H)} \xrightarrow{i_1} \frac{V^{(p_1 + \dots + p_s)}}{\Gamma_1 + \dots + \Gamma_l + \Sigma} \xrightarrow{p_1} \frac{V^{(p_1 \dots p_s)}}{\Psi^{p_1} + \dots + \Psi^{p_s}(G)} = B_1, \quad (6)$$

$$F_2 = \frac{V_1 + \dots + V_l + V_\infty}{\Gamma_1 + \dots + \Gamma_l + \Sigma} \xrightarrow{i_2} \frac{V^{(p_1 \dots p_s)}}{\Gamma_1 + \dots + \Gamma_l + \Sigma} \xrightarrow{p_2} \frac{V_1^{(p_1 \dots p_s)}}{V_1 + \dots + V_l + V_\infty} = B_2. \quad (7)$$

	$\Psi(G)$	$\Psi(H)$
AI (n четное)	$SU(n)$	$SO(n)$
AI (n нечетное)	$SU(n)$	$SO(n)$
AII	$SU(2n)$	$Sp(n)$
AIII	$U(n)$	$U(k) + U(n-k)$
$BDI \begin{pmatrix} n \text{ четное} \\ k \text{ нечетное} \end{pmatrix}$	$SO^{n/2}(n)$	$[SO(k) + SO(n-k)]^{n/2}$
$BDI \begin{pmatrix} n \text{ четное} \\ k \text{ четное} \end{pmatrix}$	$SO^{n/2}(n)$	$[SO(k) + SO(n-k)]^{n/2}$
BDI (n нечетное)	$SO(n)$	$SO(k) + SO(n-k)$
DIII	$SO^n(2n)$	$[P_1SU(n) \otimes \varphi_1 + P_{n-1}SU(n) \otimes \varphi_2]^{n/2}$
CI	$Sp(n)$	$P_1SU(n) \otimes \varphi_1 + P_{n-1}SU(n) \otimes \varphi_2$
CII	$Sp(n)$	$Sp(k) + Sp(n-k)$
EI	$P_1(E_6)$	$P_2(C_4)$
EII	$P_6(E_6)$	$Ad(A_1 + A_8) + P_3(A_8) \otimes P_1(A_1)$
EIII	$P_6(E_6)$	$Ad(D_8) \otimes \varphi_1 + P_4(D_8) \otimes \varphi_2 + P_8(D_8) \otimes \varphi_3 + \varphi_4$
EIV	$P_6(E_6)$	$P_4(F_4)$
EV	$P_7(E_7)$	$Ad(A_7) + P_4(A_7)$
EVI	$P_7(E_7)$	$Ad(D_6 + A_1) + P_6(D_6) \otimes P_1(A_1)$
EVII	$P_7(E_7)$	$Ad(E_6) \otimes \varphi_1 + P_1(E_6) \otimes \varphi_2 + P_5(E_6) \otimes \varphi_3 + \varphi_4$
EVIII	$P_1(E_8)$	$Ad(D_8) + P_8(D_8)$
EIX	$P_1(E_8)$	$Ad(E_7 + A_1) + P_6(E_7) \otimes P_1(A_1)$
FI	$P_4(F_4)$	$Ad(C_3 + A_1) + P_3(C_3) \otimes P_1(A_1)$
FII	$P_4(F_4)$	$Ad(B_4) + P_4(B_4)$

Таблица 1

p	$\Gamma(H)$	$\Theta(G)$
$n/2$	$SO^{n/2}(n)$	$P_k - P_{n-k}, k < n-k$ $P_k - P_{n-k}, k < n-k$ $P_k - P_{2n-k}, k < 2n-k$
1	$U(k) + U(n-k)$	
1	$SO^{n/2}(k) + SO^{n/2}(n-k)$	$P_{n/2-1}^2 - P_{n/2}^2$
$\frac{k(n-k)}{2}$	$SOP^{n/2}(k) + SOP^{n/2}(n-k)$	
$\frac{k(n-k)}{2}$	$SOP(k) + SOP(n-k)$	
1	$U^n(n)$	
1	$U(n)$	
1	$Sp(k) + Sp(n-k)$	
		$P_1 - P_3, P_2 - P_4$
20	$M_{12}(A_5) + M_{10}(A_1)$	
1	$P_4(D_5) \otimes \varphi_2$	
		$P_1 - P_5, P_2 - P_4$
210	$M_{120}(A_7)$	
2	$P_6^2(D_6) + P_1^2(A_1)$	
1	$P_1(E_6) \otimes \varphi_2$	
2	$P_8^2(D_8)$	
2	$P_6^2(E_7) + P_1^2(A_1)$	
2	$P_3^2(C_3) + P_1^2(A_1)$	
1	$P_4(B_4)$	

Здесь Σ — представление группы H , дополняющее Γ до $\Psi^p(H)$, $V^{(p_1 \dots p_s)} = U(N_1) + \dots + U(N_m)$, $V_\infty = U_\infty^1 + \dots + U_\infty^m$ и $U_\infty^i \sim$

унитарная группа порядка $M_i = N_i - \dim U(N_i) \cap V(\Gamma)$; знак $\approx$ в (6) указывает локальную эквивалентность (накрытие). Заметим, что:

1) Пространство B_2 изоморфно прямому произведению $W_1 \times W_2 \times \dots \times W_m$, где $W_i = U(N_i) / (U(N_i) \cap V(\Gamma)) + U_\infty^i$.

Обозначим проекцию B_2 на W_i через ω_i .

2) Пространство W_i ,

$$W_i = U(N_i) / U(m_1^i) + U(m_2^i) + \dots + U(m_{l_i}^i) + U(M_i), \quad (8)$$

расслаивается над пространством Грассмана l_i различными способами:

$$\pi_r: \frac{U(N_i)}{U(m_1^i) + \dots + U(m_{l_i}^i) + U(M_i)} \rightarrow \frac{U(N_i)}{U(m_r^i) + U(N_i - m_r^i)}.$$

3) Расслоения (6), (7) определяют отображения

$$\omega_i p_2 i_1 \pi: G/H \rightarrow W_i; \quad \xi = \pi_r \omega_i p_2 i_1 \pi: G/H \rightarrow G_{N_i, m_r^i}. \quad (9)$$

Последнее отображение задает элемент из $K^0(G/H)$ — именно тот, который в терминах конструкции B обозначается через $\delta(\Phi, l)$, где l — пространство представления одной из неприводимых компонент представления Γ_i , $i = 1, 2, \dots, l + 1$.

Теорема 3. Пусть σ_k означает $2k$ -мерную образующую алгебры $H^*(G_{N, s}, \mathbb{Z})$ (k -й класс Черна универсального пучка), $k = 1, 2, \dots, s$. Если G/H — пространство нормального положения, то элементы вида $\xi^* \sigma_k$ порождают характеристическую подалгебру расслоения $G \rightarrow G/H$.

Из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. Если G/H — пространство нормального положения, то среди элементов вида $\xi^* \Lambda_k \xi$ можно выбрать ту часть системы образующих кольца $K^*(G/H) \otimes Q$, которая принадлежит $K^0(G/H)$. Здесь ξ — универсальный пучок над пространством Грассмана, Λ_k — k -я внешняя степень.

Пучки вида $\xi^* \Lambda_k \xi$ легко могут быть построены с помощью конструкции B , так что вопрос об описании четномерных образующих кольца $K^*(G/H) \otimes Q$ с помощью конструкции B решен положительно для пространств G/H нормального положения.

В заключение приводим табл. 1 симметрических пространств, за исключением групповых, с указанием набора виртуальных представлений Θ , задающих нечетномерные образующие $K^*(G/H) \otimes Q$, а также наборов p, Γ , порождающих отображение ξ , при посредстве которого, в терминах конструкции B , получаются образующие $K^*(G/H) \otimes Q$, принадлежащие $K^0(G/H)$. P_k означает представление простой группы с числовой отметкой, по k -му простому корню равной единице, а по остальным — нулю. Нумерация корней задается схемой (рис. 1), $M_i(A_k)$ означает представление группы A_k в пространстве симметрических тензоров валентности i , $\text{Ad}(G)$ — присоединенное представление G ; $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ — некоторые одномерные представления группы $U(1)$.

Московский кооперативный институт

Поступило
30 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Доан Куинь, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 14, 1968.
² П. К. Рашевский, УМН, 23, № 3 (1969). ³ М. Атья, Лекции по K -теории, М., 1967. ⁴ А. Т. Фоменко, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, 15 (1970).
⁵ А. Борель, Сб.отв. Расслоенные пространства, ИЛ, 1958. ⁶ О. В. Мантуров, ДАН, 201, № 2 (1971).