

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Н. Ф. МОРОЗОВ

**ОСОБЕННОСТИ ОДНОРОДНЫХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ
С ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ РАЗРЕЗОМ В МОМЕНТНОЙ ТЕОРИИ
УПРУГОСТИ**

(Представлено академиком В. В. Новожиловым 31 V 1971)

В работах (¹, ²) рассматриваются однородные решения в угловой области для плоской задачи теории упругости. Учитывая моментные напряжения, А. И. Каландия (²) удалось построить некоторое однородное решение, у которого в окрестности вершины угла смещения и моментные напряжения ограничены, а обычные напряжения сингулярны. Целью настоящей работы является построение аналогичных решений с ограниченными обычными напряжениями и перемещениями и с сингулярными моментными напряжениями. Одновременно дается некоторый общий прием построения системы однородных решений плоской моментной теории упругости для угла $\alpha = 2\pi$.

Следуя Р. Д. Миндлину, рассматриваем систему уравнений

$$\begin{aligned}\Delta^2 \rho = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r} (\psi - b^2 \Delta \psi) &= -2(1-\nu) l^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial \theta}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\psi - l^2 \Delta \psi) &= 2(1-\nu) l^2 \frac{\partial \Delta \psi}{\partial r}.\end{aligned}\quad (1)$$

Приводим также формулы

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \varphi_r + \frac{1}{r^2} \varphi_{\theta\theta} - \frac{1}{r} \psi_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \psi_{\theta\theta}, \quad \sigma_\theta = \varphi_{rr} + \frac{1}{r} \psi_{r\theta} - \frac{1}{r^2} \psi_\theta; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \varphi_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \varphi_\theta - \frac{1}{r} \psi_r - \frac{1}{r^2} \psi_{\theta\theta}, \quad \tau_{\theta r} = -\frac{1}{r} \varphi_{r\theta} + \frac{1}{r^2} \varphi_\theta + \psi_{rr}; \\ \mu &= \psi_r, \quad \mu_\theta = \frac{1}{r} \psi_\theta.\end{aligned}\quad (2)$$

Будем считать, что разрез осуществлен вдоль луча $\theta = \pm\pi$.

Общее решение уравнения (1) в предположении симметрии относительно оси $\theta = 0$ имеет вид

$$\varphi = A_k r^k \cos k\theta + B_k r^k \cos (k-2)\theta, \quad (3)$$

где k — любое вещественное число.

В силу (3) второе и третье уравнения системы (1) сводятся к уравнению

$$\psi = l^2 \Delta \psi = l^2 (1-\nu) 4(k-1) B_k r^{k-2} \sin (k-2)\theta, \quad (4)$$

общее решение которого записываем следующим образом:

$$\begin{aligned}\psi &= l^2 (1-\nu) 4(k-1) B_k r^{k-2} \sin (k-2)\theta + C_\nu J_\nu \left(i \frac{r}{l} \right) \sin \nu\theta + \\ &+ C_{-\nu} J_{-\nu} \left(i \frac{r}{l} \right) \sin \nu\theta;\end{aligned}\quad (5)$$

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1/2x)^{\nu+2n}}{n! \Gamma(\nu+n+1)}; \quad (6)$$

ν — любое нецелое число (в случае целого ν формулы видоизменяются). Напомним, что в силу линейности задачи в качестве решений можно рассматривать всевозможные суммы вида (3) и (5).

Подбирая постоянные A_k, B_k, C_ν и $C_{-\nu}$, можно удовлетворять различным условиям на сторонах угла $\theta = \pi, \theta = -\pi$, а при предположении симметрии относительно оси $\theta = 0$ достаточно удовлетворять граничным условиям лишь при $\theta = \pi$.

Рассмотрим в качестве примера плоскую задачу при отсутствии напряжений на сторонах угла

$$\sigma_\theta|_{\theta=\pi} = 0, \quad \tau_{\theta r}|_{\theta=\pi} = 0, \quad \mu_\theta|_{\theta=\pi} = 0. \quad (7)$$

Возьмем

$$\begin{aligned} \varphi &= Ar^{5/2} \cos^{5/2} \theta + Br^{5/2} \cos \frac{\theta}{2} + \bar{A}r^{1/2} \cos^{1/2} \theta, \\ \psi &= l^2(1-\nu)6Br^{1/2} \sin^{1/2} \theta, \end{aligned} \quad (8)$$

причем $\bar{A} = -l^2(1-\nu)6B$; $A = -1/5 B$. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= {}^{15}/_4 A \bar{V} r \cos^{5/2} \theta + {}^{15}/_4 B \bar{V} r \cos^{1/2} \theta = {}^{15}/_4 B \bar{V} r (\cos^{1/2} \theta - {}^{1}/_5 \cos^{5/2} \theta), \\ \sigma_r &= -{}^{15}/_4 A \bar{V} r \cos^{5/2} \theta + {}^9/_4 B \bar{V} r \cos^{1/2} \theta = {}^9/_4 B \bar{V} r (\cos^{1/2} \theta + {}^{1}/_3 \cos^{5/2} \theta); \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\theta r} &= \tau_{r\theta} = {}^{15}/_4 A \bar{V} r \sin^{5/2} \theta + {}^3/_4 B \bar{V} r \sin^{1/2} \theta = \\ &= {}^3/_4 B \bar{V} r (\sin^{1/2} \theta - \sin^{5/2} \theta); \end{aligned}$$

$$\mu_r = \frac{3l^2(1-\nu)B}{\sqrt{r}} \sin^{1/2} \theta, \quad \mu_\theta = \frac{3l^2(1-\nu)B}{\sqrt{r}} \cos^{1/2} \theta.$$

Таким образом, при указанном выборе φ и ψ мы получили однородное решение задачи (1), (2), (7), причем перемещения и обычные напряжения конечны в окрестности вершины угла, а моментные напряжения имеют сингулярность, сохраняющую конечность энергии.

Заметим далее, что по известным соотношениям линейной теории упругости имеем

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1+\nu}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)], \quad \frac{v_\theta + u}{r} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)], \\ \frac{1}{2} \left(\frac{u_\theta}{r} + v_r - \frac{v}{r} \right) &= \frac{1+\nu}{E} (\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}). \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда в силу (9)

$$u = O(r^{3/2}), \quad v = O(r^{3/2})$$

и, поскольку поворот в начале координат определяется формулой

$$\operatorname{tg} \omega = v / (r + u),$$

то

$$\operatorname{tg} \omega \longrightarrow 0. \\ r \rightarrow 0$$

Таким образом, можно сделать вывод, что в результате рассматриваемой деформации оба «берега» разреза сохраняют в начале координат общую касательную и раскрытие трещины имеет характер точки возврата.

Аналогичные рассуждения можно привести и для углов $\alpha < 2\pi$.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
19 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ M. L. Williams, J. Appl. Mech., 19, № 4, 526 (1952). ² А. И. Каландия, ПММ, 33, в. 1, 132 (1969). ³ Р. Д. Миндлиш, Механика, Сборн. пер., Механика, № 4, 115 (1964).