

В. Ф. ЛАЗУТКИН

ОБ АСИМПТОТИКЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 9 IV 1971)

1. Пусть Ω — выпуклая область на плоскости с гладкой границей $\partial\Omega$, радиус кривизны которой $\rho(s)$ ограничен сверху и снизу положительными константами и имеет N непрерывных производных, как функция длины дуги. Рассмотрим задачу об определении собственных чисел оператора Лапласа с нулевыми граничными условиями:

$$\begin{aligned}(\Delta + \lambda)u &= 0, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Для случая эллипса и круга (см. ⁽¹⁾) известны явные асимптотические выражения собственных чисел λ_{pq} и собственных функций u_{pq} как функции от пары целочисленных значков, справедливые, когда $p^2 + q^2 \rightarrow \infty$. Можно ли получить подобные результаты для произвольной области Ω , т. е. параметризовать множество собственных функций двумя целочисленными значками, построить асимптотические разложения для λ_{pq} и u_{pq} по обратным степеням $\sqrt{p^2 + q^2}$ и научиться вычислять коэффициенты этих разложений через геометрию области? Частичные результаты в этом направлении (см., например, ^(2, 3)) давали подобные формулы, но доля собственных функций, получаемых таким путем, по отношению ко всем собственным функциям была исчезающе мала. Более точно, если обозначить через $N(\lambda)$ число всех (с учетом кратности) собственных чисел задачи (1), меньших, чем λ , а через $N^*(\lambda)$ соответственно число собственных чисел, для которых найдено асимптотическое разложение, то для результатов работ ^(2, 3) и других выполняется соотношение

$$N^*(\lambda)/N(\lambda) \rightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty.$$

В настоящей статье строятся асимптотические формулы для некоторой части собственных чисел и собственных функций задачи (1), причем для достаточно больших λ для выделенной серии $N^*(\lambda)/N(\lambda) > \varepsilon$. Здесь ε — некоторая положительная константа, зависящая только от области Ω .

2. Гладкую замкнутую выпуклую кривую, лежащую в Ω , будем называть каустикой, если касательный луч к ней после отражения от $\partial\Omega$ по закону геометрической оптики снова становится к ней касательным. Для случая эллипса существует непрерывное семейство каустик вблизи границы: это софокусные эллипсы. В случае произвольной области Ω непрерывного семейства каустик вообще говоря нет, однако есть разрывное семейство. Обозначим через $E(\alpha)$ множество вещественных чисел η , расположенных на интервале $(0, \alpha)$, и таких, что для любых положительных натуральных чисел n и m выполняется неравенство

$$|n\eta - m| \geq 1/2 m n^{-1/2}.\tag{2}$$

При малых α мера Лебега множества $E(\alpha)$ больше, чем $\alpha - c\alpha^{1/2}$.

Теорема 1. Пусть число производных радиуса кривизны $\partial\Omega$ удовлетворяет неравенству

$$N > 48r^2 + 300r + 357.\tag{3}$$

Тогда существует положительно α_0 и отображение

$$\varphi: S^1 \times [0, \alpha_0] \rightarrow \Omega$$

класса C^r (здесь S^1 — стандартная окружность) такое, что

а) $\Gamma_\eta = \varphi(S^1, \eta)$ есть каустика, если $\eta \in E(\alpha_0)$;

б) расстояние от $\varphi(\xi, \eta)$ до $\partial\Omega$ равно $d(\xi)(\eta^2 - O(\eta^3))$, где $d(\xi)$ — гладкая положительная функция, $\xi \in S^1, \eta \in [0, \alpha_0]$;

в) длина каустики Γ_η равна

$$\mathcal{L}(\eta) = \mathcal{L} - \eta^2 \cdot \frac{1}{8} \left(\int_{\partial\Omega} \rho^{-2/3} ds \right)^3 + O(\eta^3);$$

$$г) Q(\eta) = \eta^3 \cdot \frac{1}{12} \left(\int_{\partial\Omega} \rho^{-2/3} ds \right)^2 \int_{\partial\Omega} \rho^{-2/3} (1 + \rho'^2) ds + O(\eta^4).$$

Параметр $Q(\eta)$, характеризующий каустику Γ_η , определяется следующим образом: возьмем точку $A \in \Gamma_\eta$, выпустим из нее луч, касающийся Γ_η , он пересечет $\partial\Omega$ в точке B , отраженный луч коснется Γ_η в точке A_1 , тогда

$$Q(\eta) = |AB| + |BA_1| - \widehat{AA_1}. \quad (4)$$

Это число не зависит от точки A на Γ_η . $\widehat{AA_1}$ обозначает длину наименьшей дуги Γ_η , заключенной между A и A_1 .

Теорема 1 доказывается методом Ньютона, предложенным для задач с малыми знаменателями А. Н. Колмогоровым ⁽⁴⁾. Доказательство идет по схеме Ю. Мозера ⁽⁵⁾ с некоторыми изменениями, позволяющими получить гладкую зависимость семейства каустик Γ_η от параметра η .

3. Построенная в п. 2 система каустик позволяет написать асимптотические формулы для собственных функций и собственных чисел. Фиксируем положительную константу C и построим множество Λ в целочисленной решетке (p, q) следующим образом: $(p, q) \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда существует $\eta_{pq} \in E(\alpha_0)$ такое, что

$$|p^2\theta(\eta_{pq}) - t_q^3| < Cp. \quad (5)$$

Здесь $\theta(\eta) = ({}^{3/2}\pi Q(\eta) / \mathcal{L}(\eta))^2$, t_q — корень, функции Эйри $Ai(z)$, убывающей при $z \rightarrow +\infty$ ($Ai(-t_q) = 0$). Известно, что при больших q

$$t_q = ({}^{2/2}(q - 1/4)\pi)^{2/3}(1 + o(1)).$$

Выберем некоторую ветвь функции η_{pq} , определенной на множество Λ . Формула для собственных функций u_{pq} , $(p, q) \in \Lambda$, имеет вид

$$u_{pq}(x) = c_{pq} Ai(t_q \Psi(x)) e^{ip\Phi(x)} \chi(x), \quad (6)$$

где

$$\Psi(x) = \sum_{k=0}^{v+1} p^{-k} \Psi_k(x, \eta_{pq}, \delta_{pq}); \quad (7)$$

$$\Phi(x) = \sum_{k=0}^{v+1} p^{-k} \Phi_k(x, \eta_{pq}, \delta_{pq}). \quad (8)$$

$\chi(x)$ — срезающая функция класса C^∞ , равная единице в некоторой окрестности области, лежащей между $\partial\Omega$ и Γ_{α_0} и равная нулю вне области определения функций Φ и Ψ , которая будет определена ниже; c_{pq} — нормировочный коэффициент, выбираемый из требования $\|u_{pq}\|_{L^2(\Omega)} = 1$. В формулах (7) и (8) $p\delta_{pq} = p^2\theta(\eta_{pq}) - t_q^3$, а функции Ψ_k и Φ_k предполагаются полиномами по переменной δ_{pq} степени не выше k . Для соответствующих собственных чисел λ_{pq} формула выглядит так:

$$\lambda_{pq} = \sum_{k=0}^{v+1} p^{-k+2} a_k(\eta_{pq}, \delta_{pq}), \quad (9)$$

где

$$a_0(\eta) = \frac{4\pi^2}{\mathcal{L}^2(\eta)} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{L}^2} + \eta^2 \frac{\pi^2}{\mathcal{L}^3} \left(\int_{\partial\Omega} p^{-3/2} ds \right)^3 + O(\eta^3), \quad (10)$$

$a_k(\eta, \delta)$ — полиномы по δ степени не выше k с коэффициентами, гладко зависящими от η .

Подставляя разложения (6) и (9) в уравнение (1) и требуя, чтобы все члены до порядка $O(p^{-\nu})$ сократились, мы получим рекуррентные уравнения для определения функций Ψ_k и Φ_k . Опираясь на геометрию каустик, можно по методу Ю. А. Кравцова — Д. Людвиг (см. ⁽⁶⁾) последовательно определить функции Ψ_k и Φ_k . Из требования, чтобы функция (6) была однозначной и удовлетворяла нулевым граничным условиям, определяют коэффициенты в разложении (9).

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 $r \geq 9\nu + 17$.

Тогда существуют функции $\Phi_k(x, \eta_{pq}, \delta_{pq}, \Psi_k(x, \eta_{pq}, \delta_{pq}), a_k(\eta_{pq}, \delta_{pq}), k = 0, 1, \dots, \nu + 1$, такие, что

- Φ_k, Ψ_k, a_k — полиномы по δ_{pq} степени не выше k ;
- коэффициенты этих полиномов, где функции x , принадлежат $C[(r - 9k - 4)/2](\tilde{\Omega})$, где $\tilde{\Omega}$ — некоторая окрестность кольцевой области, заключенной между $\partial\Omega$ и Γ_{α_0} , причем производные равномерно ограничены по η_{pq} ;
- $\Psi_0|_{\partial\Omega} = -1, \Psi_k|_{\partial\Omega} = 0$ при $k \geq 1, \Psi_0(x, \eta_{pq}) < 0$ внутри области, заключенной между $\partial\Omega$ и $\Gamma_{\eta_{pq}}, \Psi_0 > 0$ во внешности этой области;
- Φ_0 при обходе вдоль границы испытывает приращение 2π , функции Φ_k при $k \geq 1$ и Ψ_k при $k \geq 0$ являются однозначными в $\tilde{\Omega}$;
- невязка, возникающая при подстановке (6) и (9) в уравнение (1), не превосходит по норме в $L_2(\Omega)$ $c_\nu p^{-\nu}$, где c_ν — константа, зависящая только от ν и области Ω ;
- выражения (6) и (9) не зависят с точностью до членов $O(p^{-\nu})$ от выбора ветви функции η_{pq} .

4. Построим на вещественной оси открытые интервалы Δ_{pq} с центрами в точках Δ_{pq} , которые даются выражением (9), и с длинами, равными $p^{-\nu+2}$. Отдельные группы из интервалов Δ_{pq} могут склеиваться в один большой интервал, однако легко видеть, что длины этих больших интервалов не превосходит $\text{const} \cdot \lambda^{(3-\nu)/2}$, где λ — центр большого интервала. Если $\lambda_{p_1q_1}$ и $\lambda_{p_2q_2}$ попали в один такой интервал, то соответствующие им функции, даваемые выражением (6), как можно показать, удовлетворяют следующему условию «ортогональности»:

$$|(u_{p_1q_1}, u_{p_2q_2})| \leq C_1 \lambda^{-1/2[\nu/2]} \cdot |p_1 - p_2|^{-1}. \quad (11)$$

Из теоремы 2 и оценки (11) можно вывести следующую теорему. Обозначим через $N^*(\lambda)$ число собственных чисел задачи (1), меньших λ , попавших в построенную нами систему интервалов. Каждое собственное число считается столько раз, какова его кратность.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 2 $\nu > 3$.

Тогда существует положительное число ε , зависящее только от Ω, ν, α_0 и константы C , входящей в определение множества Λ , такое, что при достаточно больших λ

$$N^*(\lambda) > \varepsilon \lambda. \quad (12)$$

Научно-исследовательский физический институт
Ленинградского государственного университета
им. А. А. Жданова

Поступило
23 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ J. Keller, S. Rubinov, Ann. Phys., 9, № 1, 24 (1960).
- ² В. Ф. Лазуткин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 10, № 2, 362 (1962).
- ³ В. Ф. Лазуткин, Там же, 7, № 6, 1237 (1967).
- ⁴ А. Н. Колмогоров, ДАН, 98, № 4, 527 (1954).
- ⁵ J. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1 (1962).
- ⁶ Ю. А. Кравцов, Акустич. журн., 14, № 1, 1 (1968).