Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 6

УДК 517.9 *МАТЕМАТИКА*

В. Г. ЛИМАНСКИЙ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА УСТОЙЧИВОГО ТИПА

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 2 IV 1971)

Рассмотрим задачу

$$y'(t)+f(t,y(s))=0,\quad y(t)=\varphi(t),\quad t\in\bar{E}_0, \tag{1}$$

где $f(t,\alpha(s))$ — функционал [3], удовлетворяющий при $\alpha(t)\in C$ условиям

$$\operatorname{sign} f(t,\alpha(s))=\operatorname{sign}\alpha(t-\theta(t))\quad(\alpha(s)\neq 0),$$

$$v(\min|\alpha(s)|)\leqslant|f(t,\alpha(s))|\leqslant X(\max|\alpha(s)|);$$

$$f(t,\alpha(s))\geqslant-\Omega(|\min\alpha(s)|,\max\alpha(s))\quad(|\min\alpha(s)|\leqslant\max\alpha(s)),$$

$$f(t,\alpha(s))\leqslant\Omega(\max\alpha(s),|\min\alpha(s)|)\quad(|\min\alpha(s)|>\max\alpha(s)),$$

$$\min\alpha(s)\leqslant 0\leqslant\max\alpha(s),$$

где $\Omega(x,y)$ $(x,y\subset[0,H_*],\ x\leqslant y)$ есть неубывающая непрерывная по каждому аргументу функция, причем $\Omega(0,y)\equiv 0$; $v(y)$, $V(y)$ $(y\in[0,H_*]$ есть неубывающие непрерывные функции, причем $v(0)=V(0)=0$.

В настоящей заметке мы сформулируем несколько теорем об ограниченных решениях задачи (1) и более общей задачи (см. задачу (3)). Их доказательство опирается на высказанные в работе [3] теоремы 1—9 о сравнении. Метод исследования получен в результате обобщения метода, разработанного А. Д. Мышкисом применительно к линейным дифференциальным уравнениям первого порядка с запаздывающим аргументом [1].

При фиксированном параметре $D_0\in(0,H_*]$ и при выполнении неравенства $\Delta_0-2D_0:V(D_0)\leqslant 0$ рассмотрим следующую функцию от x:

$$h(x,D_0)=\begin{cases}\displaystyle\int_{\Delta_0-x}^{\Delta_0}V(sV(D_0))\,ds & (0\leqslant x\leqslant\xi_0,\ \Delta_0-D_0:V(D_0)<0),\\ xV(D_0) & (0\leqslant x\leqslant\Delta_0-D_0:V(D_0)),\\ \displaystyle\Delta_0V(D_0)-D_0+\int_{\Delta_0-x}^{D_0:V(D_0)}V(sV(D_0))\,ds & (0\leqslant\Delta_0-D_0:V(D_0)\leqslant\\ & \leqslant x\leqslant\xi_0),\\ \bar{y}(x) & (\xi_0\leqslant x\leqslant\Delta_0),\end{cases}$$

где $\bar{y}(x)$ есть решение задачи

$$\bar{y}'(x)=\Omega(\bar{\varphi}(x-\Delta_0),\bar{y}(x)),\quad \bar{y}(\xi_0)=h(\xi_0,D_0),$$

$$\bar{\varphi}(x)=\begin{cases}|x|V(D_0) & (-\Delta_0\leqslant x\leqslant 0,\ \Delta_0-D_0:V(D_0)<0),\\ D_0 & (-\Delta_0\leqslant x\leqslant -D_0:V(D_0),\ \Delta_0-D_0:V(D_0)\geqslant 0),\\ |x|V(D_0) & (-D_0:V(D_0)\leqslant x\leqslant 0,\ \Delta_0-D_0:V(D_0)\geqslant 0);\end{cases}$$

ξ_0 есть корень уравнения: $(\Delta_0-x)V(D_0)=h(x,D_0)$.

Теорема 1. *Если в задаче* (1) *справедливо неравенство* $h(\Delta_0, D_0) \leqslant \leqslant D_0(\Delta_0 - 2D_0\colon V(D_0) \leqslant 0)$, *то* $D \leqslant D_0(D_0 = |y(t_0)| + \Delta_0 V(H))$.

Пусть на отрезке $[2\Delta_0, 4\Delta_0]$ задана постоянная положительная функция $Y_0(x)$. Рассмотрим функции $Y_i(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 4\Delta_0)$, определенные с помощью следующего рекуррентного соотношения $Y_{i+1}(x) = \max\{h(\Delta_0, D_i), \overline{\overline{y}}(\zeta), \overline{\overline{y}}(x)\}$, где $\overline{\overline{y}}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'(x) + v(\underline{\underline{y}}(x)) = 0$, $\underline{\underline{y}}(0) = D_i$, $D_i = Y_i(\zeta)$, ζ — некоторое число из отрезка $[2\Delta_0, 4\Delta_0]$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Обозначим $E(t) = \{Y_{i+1}(t - T_i)$ $(T_i \leqslant \leqslant t \leqslant T_{i+1}, i = 0, 1, \ldots)\}$, где $T_i = t_0 + (4i + 3)\Delta_0$.

Теорема 2. *Пусть* $v(y) \neq 0$ $(y > 0)$ *и*

$$h(\Delta_0, \varepsilon) < \varepsilon \quad (0 < \varepsilon \leqslant D_0). \tag{2}$$

Тогда функция $E(t)$ *есть функция непрерывная, невозрастающая, стремящаяся к нулю при* $t \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть в задаче* (1) *выполняется неравенство* (2), *в котором* $D_0 = Y_0(x) \equiv \max\limits_{[t_0+\Delta_0,\, t_0+3\Delta_0]} |y(t)|$.

Тогда найдутся такие числа $k \in [0, 1]$, $\zeta \in [2\Delta_0, 4\Delta_0]$, *что*

$$|y(t)| \leqslant \begin{cases} H + (t - t_0) V(H) & (t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta_0), \\ H + \Delta_0 V(H) & (t_0 + \Delta_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 3\Delta_0), \\ kE(t) & (t \geqslant t_0 + 3\Delta_0). \end{cases}$$

Теорема 4. *Пусть при некотором положительном числе* $D_0 < \infty$ *выполняются условия теоремы* (2).

Тогда тривиальное решение задачи (1) *асимптотически устойчиво равномерно по времени* $t_0 \geqslant 0$ *и по начальным кривым* $\varphi(t)$ *из области* A $(A = \{\varepsilon\colon \varepsilon + \Delta_0 V(\varepsilon) \leqslant D_0\})$.

Следствие. *При условиях теоремы 4 тривиальное решение задачи* (1) *устойчиво при постоянно действующих возмущениях.*

Доказательство опирается на теорему 4 и результат Н. Н. Красовского (см. ([2]), теорема 32.1).

В ином плане задача типа задачи (1) исследовалась в ([4]).

Рассмотрим теперь задачу

$$y'(t) + f(t, y(s)) + F(t, y(s)) = 0, \quad y(t) = \varphi(t), \quad t \in \bar{E}_0, \tag{3}$$

где функционал $f(t, y(s))$ удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям, а функционал $F(t, y(s))$ непрерывен, причем $|F(t, y(s))| \leqslant \leqslant F_0(\max|y(s)|)$; $F_0(y)$, $y \in [0, H_*]$ — некоторая неубывающая функция.

Чтобы оценить решение (3), рассмотрим уравнение

$$\bar{y}'(x) + V(\bar{y}(\bar{s})) = 0 \tag{4}$$

вначале с начальным условием

$$\bar{y}(0) = -H_0, \quad \bar{y}(x) \equiv H_0 \quad (-\Delta_0 \leqslant x < 0), \tag{5}$$

затем с начальным условием

$$\bar{y}(x) = \bar{\varphi}(x) \quad (-\Delta_0 \leqslant x \leqslant 0), \tag{6}$$

где $|\varphi(t)| \leqslant H_0 = \mathrm{const} \leqslant H_*$ $(H_0 > 0)$,

$$V(\bar{y}(\bar{s})) = \begin{cases} V(\bar{y}(x - \Delta_0)) + F_0(\bar{y}(x - \Delta_0)) & (\bar{y}(x - \Delta_0) \geqslant |\bar{y}(x)|), \\ \Omega(\bar{y}(x - \Delta_0), |\bar{y}(x)|) + F_0(|y(x)|) & (0 \leqslant \bar{y}(x - \Delta_0) < |\bar{y}(x)|), \\ -v(|\bar{y}(x - \Delta_0)|) + F_0(|\bar{y}(t)|) & (\bar{y}(x) \leqslant \bar{y}(x - \Delta_0) < 0); \end{cases}$$

$D_0 = |\bar{y}_1(\bar{b})|$, $\bar{b}$ — точка, в которой достигается значение первого минимума функции $\bar{y}_1(x)$, удовлетворяющей задаче (4), (5) (здесь $\bar{y}_1'(\bar{b} - 0) \neq \neq \bar{y}_1'(\bar{b} + 0)$).

Теорема 5. *Пусть в точке $\bar{b}$ достигается значение первого минимума функции $\bar{y}_1(x)$, удовлетворяющей задаче* (4), (5), *а в точке $\bar{\bar{b}}$ достигается значение первого минимума функции $\bar{y}_2(x)$, удовлетворяющей задаче* (4), (6); *пусть* $|\bar{y}_2(\bar{\bar{b}})| \leqslant D_0$ $(D_0 = |\bar{y}_1(\bar{b})|)$, $\bar{y}(b - \Delta_0) - \Delta_0 F_0(D_0) \geqslant \bar{y}(\bar{c})$, *где $\bar{c}$ — самая левая точка из тех точек t, в которых* $\bar{y}(t - \Delta_0) = 0$.

Тогда для решения задачи (3) *справедлива оценка*

$$|y(t)| \leqslant D_0, \quad t \in [t_0, T).$$

Замечание 1. Оценку $\bar{y}(\bar{b} - \Delta_0) - \Delta_0 F_0(D_0) \geqslant \bar{y}(\bar{c})$ в теореме 5 можно уточнить, однако формулировка теоремы будет в этом случае громоздкой.

Частным случаем задачи (3) является задача

$$y'(t) + f(t, y(t - \tau(t))) + F(t, y(t - \tau(t))) = 0, \quad y(t) = \varphi(t), \quad t \in \bar{E}_0, \tag{7}$$

где $f(t, y)$, $F(t, y)$, $y \in [-H_*, H_*]$ — некоторые непрерывные функции; $\operatorname{sign} f(t, y) = \operatorname{sign} y$, $v_0(|y|) \leqslant |f(t, y)| \leqslant V_0(|y|)$, $|F(t, y)| \leqslant F_0(|y|)$; $v_0(y)$, $V_0(y)$, $F_0(y)$, $y \in [0, H_*]$,— некоторые неубывающие непрерывные функции, причем $v_0(0) = V_0(0) = 0$. Пусть

$$V(y) = \begin{cases} V_0(y) + F_0(y) & (y \geqslant 0), \\ -v_0(|y|) + F_0(|y|) & (y < 0). \end{cases} \tag{8}$$

Очевидно, $f(t, y) + F(t, y) \leqslant V(y)$, $y \in [-H_*, H_*]$.

Чтобы оценить решение задачи (7), рассмотрим уравнение

$$\bar{y}'(t) + V(\bar{y}(t - \Delta_0)) = 0 \tag{9}$$

вначале с начальным условием (5), затем с начальным условием (6), где $|\varphi(t)| \leqslant H_0 = \text{const} \leqslant H_*$ $(H_0 > 0)$, $D_0 = |\bar{y}_1(\bar{b})|$, $\bar{b}$ — точка, в которой достигается значение первого минимума функции $\bar{y}_1(x)$, удовлетворяющей задаче (5), (9).

Теорема 6. *Пусть в точке $\bar{b}$ достигается значение первого минимума функции $\bar{y}_1(x)$, удовлетворяющей задаче* (5), (9), *а в точке $\bar{\bar{b}}$ достигается значение первого минимума функции $\bar{y}_2(x)$, удовлетворяющей задаче* (6), (9); *пусть* $|\bar{y}_2(\bar{\bar{b}})| \leqslant D_0$ $(D_0 = |\bar{y}_1(\bar{b})|)$.

Тогда для решения задачи (7) *справедлива оценка*

$$|y(t)| \leqslant D_0, \quad t \in [t_0, T).$$

Замечание 2. Все результаты настоящей работы и работы ([3]) остаются справедливыми, если $\varphi(t)$, $\bar{\varphi}(t)$, $v(y)$, $v_0(y)$, $V(y)$, $V_0(y)$, $F_0(y)$, $f(t, \alpha(s))$, $V(t, \alpha(s))$, $\Omega(x, y)$, $\theta(t)$, $\bar{\theta}(t)$, $\tau(t)$, $\bar{\tau}(t)$ являются кусочно-непрерывными функциями (здесь, по определению, неравенство $\tau(a) \geqslant \tau(b)$ означает $\tau(a + 0) \geqslant \tau(b + 0)$, $\tau(a - 0) \geqslant \tau(b - 0)$).

В заключение автор выражает глубокую благодарность акад. С. А. Христиановичу и А. Д. Мышкису за интерес к работе и ценные советы.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений
п. о. Менделеево Московск. обл.

Поступило
12 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Мышкис, Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, М., 1951. [2] Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959. [3] В. Г. Лиманский, ДАН, **200**, № 5 (1971). [4] J. A. York, J. Different. Equat., 7, № 1 (1970).