

В. М. БРОДСКИЙ, Я. С. ШВАРЦМАН

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ СЖАТИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 27 IV 1971)

Настоящая статья посвящена изучению инвариантных подпространств линейных сжимающих операторов. Полученный критерий существования таких подпространств формулируется в терминах узлов и их характеристических функций ⁽¹⁾. Этот же круг вопросов рассматривали Б. С. Надь и Ч. Фояш ⁽²⁾ и Л. де Бранж ⁽³⁾. Систематическое использование более общего определения характеристической функции позволило получить более простой критерий, нежели у Б. С. Нады и Ч. Фояша. Результаты Л. де Бранжа не содержат правил выделения инвариантных подпространств по аналитическим свойствам характеристических функций. Инвариантные подпространства ограниченных диссипативных операторов для отдельных частных случаев изучались в работах ⁽⁴⁻⁶⁾, а в общем виде — в работах ^(7, 8). Применяемые нами методы аналогичны методам работы ⁽⁸⁾ и, следовательно, не используют понятия унитарной дилатации, лежащего в основе построений Б. С. Нады и Ч. Фояша.

1. Символом $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$, где $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ — гильбертовы пространства, обозначим совокупность всех линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Согласно определениям из ⁽¹⁾, совокупность гильбертовых пространств $\mathfrak{H}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ и операторов $T \in [\mathfrak{H}, \mathfrak{H}]$, $F \in [\mathfrak{F}, \mathfrak{H}]$, $G \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{H}]$, $T_0 \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{F}]$ называется сжимающим узлом (с.у.) и обозначается символом

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mathfrak{H} & T & \mathfrak{H} \\ F & & G \\ \mathfrak{F} & T_0 & \mathfrak{G} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

если

$$I - TT^* = FF^*, I - T^*T = GG^*, TG = FT_0, I - T_0T_0^* = F^*F, I - T_0^*T_0 = G^*G. \quad (2)$$

Оператор T называется основным оператором, а пространство $\mathfrak{H}$ — основным пространством (1). С.у. называется простым, если пространство $\mathfrak{H}$ совпадает с замыканием линейной оболочки множества всех векторов вида $T^n Ff$, $(T^*)^n Gg$ ($n = 0, 1, \dots, f \in \mathfrak{F}, g \in \mathfrak{G}$). Любое сжатие является, очевидно, основным оператором некоторого с.у., причем с.у. прост тогда и только тогда, когда сжатие вполне неунитарно *. Оператор-функция комплексного переменного

$$\Theta_\alpha(\zeta) = T_0 - \zeta F^* (I - \zeta T^*)^{-1} G \quad (3)$$

называется характеристической функцией узла (1).

Через $\mathfrak{A}(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ обозначим множество всех голоморфных внутри единичного круга оператор-функций, значения которых являются сжатиями из $[\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2]$. Легко видеть, что, каков бы ни был с.у. (1), всегда $\Theta_\alpha(\zeta) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$.

Пусть $\Theta(\zeta) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$. Как известно, почти всюду на единичной окружности существуют угловые предельные значения $\Theta(e^{it})$ функции $\Theta(\zeta)$

* Оператор T называется вполне неунитарным, если не существует инвариантного относительно T и T^* ненулевого подпространства, в котором индуцируется унитарный оператор.

в смысле сильной сходимости ⁽²⁾. Положим $\Delta(e^{it}) = (I - \Theta^*(e^{it})\Theta(e^{it}))^{1/2}$ и рассмотрим пространство $\hat{\mathfrak{H}} = H_2(\mathfrak{F}) \oplus \Delta L_2(\mathfrak{G})$. Оно является замыканием множества всех пар функций вида $\{\varphi(e^{it}), \Delta(e^{it})\psi(e^{it})\}$, где

$$\varphi(e^{it}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{ikt} f_k, \psi(e^{it}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} g_k$$

$$\left(f_k \in \mathfrak{F}, g_k \in \mathfrak{G}, \sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|^2 < \infty, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \|g_k\|^2 < \infty \right).$$

Совокупность всех векторов

$$\{\Theta(e^{it})\chi(e^{it}), \Delta(e^{it})\chi(e^{it})\} \quad (\chi(e^{it}) \in H_2(\mathfrak{G}))$$

образует подпространство в $\hat{\mathfrak{H}}$. Обозначим его через $\hat{\mathfrak{H}}'$ и положим $\hat{\mathfrak{H}} = \hat{\mathfrak{H}} \oplus \hat{\mathfrak{H}}'$.

Теорема 1. Если $\Theta(\zeta) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$, то совокупность $\hat{\mathfrak{a}}$ пространств $\hat{\mathfrak{H}}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ и операторов

$$T\{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\} =$$

$$= \{\varphi(e^{it}) - \Theta(e^{it})c_{\varphi, \psi}, e^{it}\psi(e^{it}) - \Delta(e^{it})c_{\varphi, \psi}\}$$

$$(\{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\} \in \hat{\mathfrak{H}}, c_{\varphi, \psi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{it} [\Theta^*(e^{it})\varphi(e^{it}) + \Delta(e^{it})\psi(e^{it})] dt), \quad (4)$$

$$T_0 = \Theta(0),$$

$$\hat{F}f = \{(\Theta(e^{it})T_0^* - I)f, \Delta(e^{it})T_0^*f\} \quad (f \in \mathfrak{F}),$$

$$\hat{G}g = \{e^{-it}(\Theta(e^{it}) - T_0)g, e^{-it}\Delta(e^{it})g\} \quad (g \in \mathfrak{G})$$

образует простой с.у., характеристическая функция которого совпадает внутри единичного круга с $\Theta(\zeta)$.

Доказательство. Вычисляя скалярные произведения $(\hat{T}h, h_1)$, $(\hat{F}f, h)$, $(\hat{G}g, h)$ ($h, h_1 \in \hat{\mathfrak{H}}, f \in \mathfrak{F}, g \in \mathfrak{G}$), приходим к равенствам

$$\hat{T}^*\{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\} = \{e^{-it}(\varphi(e^{it}) - \varphi(0)), e^{-it}\psi(e^{it})\}$$

$$(\{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\} \in \hat{\mathfrak{H}}), \quad (5)$$

$$\hat{F}^*\{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\} = -\varphi(0), \quad \hat{G}^*\{\varphi(e^{it}), \psi(e^{it})\} = c_{\varphi, \psi}.$$

Условия (2) для операторов $\hat{T}, \hat{F}, \hat{G}, T_0$ вытекают из (4) и (5).

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что

$$(I - \zeta\hat{T})^{-1}\hat{F}f = \left\{ \frac{I - \Theta(e^{it})\Theta^*(\bar{\zeta})}{1 - e^{it}\bar{\zeta}} f, \frac{\Delta(e^{it})\Theta^*(\bar{\zeta})}{1 - e^{it}\bar{\zeta}} f \right\} \quad (f \in \mathfrak{F}, |\zeta| < 1), \quad (6)$$

$$(I - \zeta\hat{T}^*)^{-1}\hat{G}g = \left\{ \frac{\Theta(e^{it}) - \Theta(\zeta)}{e^{it} - \zeta} g, \frac{\Delta(e^{it})}{e^{it} - \zeta} g \right\} \quad (g \in \mathfrak{G}, |\zeta| < 1). \quad (7)$$

Совокупность всех векторов вида (6), (7) полна в $\hat{\mathfrak{H}}$ и, следовательно, узел $\hat{\mathfrak{a}}$ прост. В силу (5) и (7) имеем

$$\Theta_{\hat{\mathfrak{a}}}(\zeta)g = T_0g - \zeta\hat{F}^*\left\{ \frac{\Theta(e^{it}) - \Theta(\zeta)}{e^{it} - \zeta} g, \frac{\Delta(e^{it})}{e^{it} - \zeta} g \right\} =$$

$$= T_0g - \zeta \frac{\Theta(0) - \Theta(\zeta)}{-\zeta} g = \Theta(\zeta)g \quad (g \in \mathfrak{G}, |\zeta| < 1).$$

Теорема доказана.

* Пространства $L_2(\mathfrak{A})$ и $H_2(\mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ — сепарабельное гильбертово пространство, подробно описаны в ⁽²⁾, стр. 205—208.

Из теоремы 1 следует, что для каждой функции $\Theta(\zeta) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})$ существует простой с.у. α такой, что $\Theta(\zeta) = \Theta_\alpha(\zeta)$ ($|\zeta| < 1$). Это утверждение для случая, когда $\|\Theta(0)g\| < \|g\|$ ($g \in \mathfrak{G}$) и

$$\mathfrak{F} = (\overline{I - TT^*})\mathfrak{G}, \quad \mathfrak{G} = (\overline{I - T^*T})\mathfrak{F}, \quad T_0g = Tg \quad (g \in \mathfrak{G}), \\ F = (I - TT^*)^{1/2}\mathfrak{F}, \quad G = (I - T^*T)^{1/2}\mathfrak{G} \quad (T \in [\mathfrak{F}, \mathfrak{F}], \|T\| < 1)$$

было доказано Б. С. Надем и Ч. Фояшем ⁽²⁾.

Рассмотрим простой с.у. (1). Узел $\hat{\alpha}$, построенный по функции $\Theta(\zeta) = \Theta_\alpha(\zeta)$, назовем функциональной моделью с.у. (1).

Узлы

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_1 & T_1 & \mathfrak{F}_1 \\ F_1 & & G_1 \\ \mathfrak{F}_1 & T_0^{(1)} & \mathfrak{G}_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} \mathfrak{F}_2 & T_2 & \mathfrak{F}_2 \\ F_2 & & G_2 \\ \mathfrak{F}_2 & T_0^{(2)} & \mathfrak{G}_2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

называются унитарно эквивалентными, если

$$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_2, \quad \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}_2, \quad T_0^{(1)} = T_0^{(2)} \quad (9)$$

и существует такое изометрическое отображение U пространства $\mathfrak{F}_1$ на $\mathfrak{F}_2$, что $UT_1 = T_2U$, $F_2 = UF_1$, $G_2 = UG_1$. Как известно, для того чтобы простые узлы (8), удовлетворяющие условиям (9), были унитарно эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы $\Theta_{\alpha_1}(\zeta) = \Theta_{\alpha_2}(\zeta)$ ($|\zeta| < 1$) ⁽¹⁾ *. Отсюда и из теоремы 1 вытекает, что любой простой с.у. и его функциональная модель унитарно эквивалентны.

2. Пусть с.у. (8) таковы, что $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{G}_2$. Их произведением $\alpha = \alpha_2\alpha_1$ называется совокупность пространств $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1$ и операторов

$$T = T_1P_1 + T_2P_2 - F_1G_2^*P_2 \in [\mathfrak{F}, \mathfrak{F}], \quad T_0 = T_0^{(2)}T_0^{(1)} \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{F}], \\ F = F_1(T_0^{(2)})^* + E_2 \in [F, \mathfrak{F}], \quad G = G_1 + G_2T_0^{(1)} \in [\mathfrak{G}, \mathfrak{F}],$$

где через P_j обозначен ортопроектор на $\mathfrak{F}_j$ ($j = 1, 2$). В работе ⁽¹⁾ показано, что произведение $\alpha_2\alpha_1$ есть с.у., причем

$$\Theta_{\alpha_2\alpha_1}(\zeta) = \Theta_{\alpha_2}(\zeta)\Theta_{\alpha_1}(\zeta). \quad (10)$$

Пусть дан с.у. (1) и пусть подпространство $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}$ инвариантно относительно T , $\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F} \ominus \mathfrak{F}_1$. Существуют такие с.у. (8), что

$$T_1 = P_1T|_{\mathfrak{F}_1}, \quad G_1 = P_1G, \quad \mathfrak{G}_1 = \mathfrak{G}, \quad T_2 = P_2T|_{\mathfrak{F}_2}, \quad F_2 = P_2F, \quad \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F},$$

где P_1 и P_2 — ортопроекторы на $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ ⁽¹⁾. Эти узлы называются проекциями с.у. (1) соответственно на $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ и обозначаются символами $\text{pr}_{\mathfrak{F}_1} \alpha (= \alpha_1)$, $\text{pr}_{\mathfrak{F}_2} \alpha (= \alpha_2)$. Проекции узла определяются неоднозначно. Однако, имея одну из проекций, можно выбрать вторую так, чтобы выполнялось равенство $\alpha = \alpha_2\alpha_1$. Таким образом, согласно (10) каждому инвариантному подпространству основного оператора узла α соответствует факторизация функции $\Theta_\alpha(\zeta)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Пусть сжатие $T \in [\mathfrak{F}, \mathfrak{F}]$ вполне неунитарно. Рассмотрим с.у. α с основным оператором T и предположим, что функция $\Theta_\alpha(\zeta)$ представлена в виде

$$\Theta_\alpha(\zeta) = \Theta_2(\zeta)\Theta_1(\zeta) \quad (\Theta_1(\zeta) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{G}, \mathfrak{G}), \Theta_2(\zeta) \in \mathfrak{A}(\mathfrak{G}, \mathfrak{F})). \quad (11)$$

Факторизацию (11) назовем правильной, если существует такое инвариантное относительно оператора T подпространство $\mathfrak{F}_1$, что $\Theta_1(\zeta) = \Theta_{\alpha_1}(\zeta)$, $\Theta_2(\zeta) = \Theta_{\alpha_2}(\zeta)$ ($|\zeta| < 1$), где $\alpha_1 = \text{pr}_{\mathfrak{F}_1} \alpha$, $\alpha_2 = \text{pr}_{\mathfrak{F}_2} \alpha$ ($\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F} \ominus \mathfrak{F}_1$)

* Это утверждение для случая, когда основные операторы узлов α_2 , α_1 обратимы, доказано в ⁽⁹⁾.

и $\alpha = \alpha_2 \alpha_1$. Факторизация (11) правильна тогда и только тогда, когда произведение $\alpha_2 \alpha_1$ произвольных простых узлов α_1 и α_2 таких, что

$$\Theta_1(\zeta) = \Theta_{\alpha_1}(\zeta), \quad \Theta_2(\zeta) = \Theta_{\alpha_2}(\zeta), \quad (12)$$

есть простой узел ⁽¹⁾ *.

Пусть сжатие $A \in [\mathcal{G}, \mathcal{F}]$ представлено в виде $A = A_2 A_1$, где $A_1 \in [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, $A_2 \in [\mathcal{G}, \mathcal{F}]$ — также сжатия. Обозначим области значений операторов $(I - A_1 A_1^*)^{1/2}$, $(I - A_2^* A_2)^{1/2}$ соответственно через $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$. Факторизацию $A = A_2 A_1$ назовем регулярной, если $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \{0\}$ **. С помощью теоремы 1 доказывается

Теорема 2. Пусть α — простой с.у. и

$$\Theta_\alpha(\zeta) = \Theta_2(\zeta) \Theta_1(\zeta) \quad (\Theta_1(\zeta) \in \mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{G}), \Theta_2(\zeta) \in \mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{F})). \quad (13)$$

Для того чтобы факторизация (13) была правильной, необходимо и достаточно, чтобы факторизация $\Theta_\alpha(e^{it}) = \Theta_2(e^{it}) \Theta_1(e^{it})$ была регулярной почти всюду на единичной окружности.

Легко видеть, что факторизация $\Theta_\alpha(e^{it}) = \Theta_2(e^{it}) \Theta_1(e^{it})$ регулярна в точке $t = t_0$, если выполняется хотя бы одно из равенств $\Theta_1(e^{it_0}) \Theta_1^*(e^{it_0}) = I$, $\Theta_2^*(e^{it_0}) \Theta_2(e^{it_0}) = I$.

Обозначим через $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_1'$ инвариантные подпространства основного оператора простого с.у. α . Положим $\alpha_1 = \text{pr}_{\mathfrak{F}_1} \alpha$, $\alpha_2 = \text{pr}_{\mathfrak{F}_1'} \alpha$.

Теорема 3. Для того чтобы $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_1'$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) существует такая функция $\Theta_2(\zeta) \in \mathcal{A}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$, что $\Theta_{\alpha_1}(\zeta) = \Theta_2(\zeta) \Theta_{\alpha_1}(\zeta)$;
- 2) факторизация $\Theta_{\alpha_1}(e^{it}) = \Theta_2(e^{it}) \Theta_{\alpha_1}(e^{it})$ регулярна почти всюду на единичной окружности.

Одесский государственный педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило
27 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. М. Бродский, ДАН, 198, № 1 (1971). ² Б. С. Надъ, Ч. Фояш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., 1970. ³ L. de Branges, J. Math. Anal. and Appl., 29, 163 (1970). ⁴ М. С. Бродский, Треугольные и жордановы представления линейных операторов, «Наука», 1970. ⁵ Ю. Л. Шмультян, Матем. сборн., 57 (99), № 1, 105 (1962). ⁶ Я. С. Шварцман, Матем. исслед., Кишинев, 3, 3, 126 (1968). ⁷ Я. С. Шварцман, Функц. анализ и его прилож., 4, 4, 85 (1970). ⁸ Я. С. Шварцман, Матем. исслед., Кишинев (в печати). ⁹ В. М. Бродский, И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Acta Sci. Math. Szeged, 32, в. 1—2, 141 (1971).

* Существование простых узлов α_1 и α_2 , удовлетворяющих условию (12), следует из теоремы 1.

** Это определение эквивалентно определению регулярной факторизации, принятому в (2). По существу, оно было введено Ю. Л. Шмультяном (5).