Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 6

УДК 517.561

МАТЕМАТИКА

В. А. ОЛЕЙНИКОВ

РАЦИОНАЛЬНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СУПЕРПОЗИЦИИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 14 VI 1971)

Пусть K — алгебраически замкнутое поле характеристики 0. Пусть $K\langle z_1, \ldots, z_n\rangle$ — трансцендентное расширение поля K степени n $(n \geqslant 0)$. Под *алгебраической функцией* F от n независимых переменных $z_1, \ldots, z_n$ над K будем понимать элемент алгебраического замыкания поля $K\langle z_1, \ldots, z_n\rangle$, удовлетворяющий неприводимому уравнению

$$P(f, z_1, \ldots, z_n) = 0. \tag{1}$$

В левой части этого уравнения стоит полином P, неприводимый в кольце $K[f, z_1, \ldots, z_n]$, степени $m \geqslant 1$ по f. Полином P будем называть *определяющим для* F.

Две алгебраические функции F_1, F_2 полагаются равными в том и только том случае, когда (с точностью до множителей из K) совпадают их определяющие полиномы P_1, P_2. Будем говорить, что алгебраическая функция F фактически зависит от переменного z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, если величина z_i входит в определяющий полином P в ненулевой степени. Величину z_i будем называть *переменной функции* F только в том случае, когда F фактически зависит от z_i. Возможные исключения будут каждый раз оговорены особо.

Составными частями общего понятия суперпозиции являются базисные функции, функции дерева суперпозиции и результат суперпозиции. Понятие алгебраической суперпозиции предполагает, что все ее составные части суть алгебраические функции (с числом переменных $\leqslant n$) и общее число их конечно.

Базисные функции будем обозначать через F_α, F_β; полный набор переменных каждой функции есть поднабор z из $(z_1, \ldots, z_n)$.

Функция дерева есть оператор, действующий на базисные функции или на результаты действия других операторов дерева. Функцию дерева обозначим через $\mathfrak{F}$, ее переменные через $u_1, \ldots, u_n$. $\mathfrak{P}(f_1, u_1, \ldots, u_n)$ — определяющий полином $\mathfrak{F}$.

Действие оператора $\mathfrak{F}(u_1, \ldots, u_s)$ $(s \leqslant n)$ на s базисных функций $F_1, \ldots, F_s$ состоит в следующем. Пусть $\mathfrak{P}(f, u_1, \ldots, u_n)$, $P_1 = P_1(f, z), \ldots$ $\ldots, P_s = P_s(f, z)$ — соответственно определяющие полиномы рассматриваемых функций. В каждом из P_j $(j = 1, \ldots, s)$ заменим f на u_j:

$$P_j = P_j(u_j, z) \qquad (j = 1, \ldots s). \tag{2}$$

Выберем любой полином из этой совокупности, например $P_1(u_1, z)$, и составим результант R_1 полинома $\mathfrak{P}(f, u_1, \ldots, u_s)$ и $P_1(u_1, z)$ относительно u_1:

$$R_1(\mathfrak{P}, P_1) = R_1(f, u_2, \ldots, u_s, z).$$

Затем выберем следующий полином P_2 из совокупности (2) и исключим из R_1 величину u_2:

$$R_2(R_1, P_2) = R_2(f, u_3, \ldots, u_s, z).$$

и т. д. Исключив все $u_1, \ldots, u_s$ из $\mathfrak{P}$ с помощью P_j $(j = 1, \ldots, s)$, получим полином $R(f, z)$.

Суперпозиция оператора $\mathfrak{F}$ и функций $F_1, \ldots, F_s$ называется *допустимой*, если полином R (и все промежуточные $R_1, \ldots, R_s$) фактически зависит от f.

Результат действия $\mathfrak{F}$ на $F_1, \ldots, F_s$ есть совокупность алгебраических функций (от z), определяемых неприводимыми делителями полинома R. Можно показать, что в случае допустимой суперпозиции результат действия $\mathfrak{F}$ не зависит от порядка исключения величин $u_1, \ldots, u_s$ из полинома $\mathfrak{P}$. Результат суперпозиции есть совокупность алгебраических функций (от z), полученных после действия всех операторов дерева на упорядоченные промежуточные результаты. Порядок действий предписывается структурой дерева суперпозиции. Будем говорить, что алгебраическая функция F от n переменных $z_1, \ldots, z_n$ представима в виде суперпозиции заданных базисных функций F_α и функций дерева $\mathfrak{F}$, если F принадлежит результату их суперпозиции.

Суперпозиция называется строгой (относительно n), если число переменных каждой базисной функции F_α и функций дерева меньше n. Понятие о представлении алгебраической функции F от n переменных в виде строгой суперпозиции имеет смысл при $n \geqslant 3$.

Назовем суперпозицию рациональной алгебраической, если все функции дерева $\mathfrak{F}$ принадлежат полю $K\langle u_1, \ldots, u_n\rangle$, а базисные функции F_α — любые алгебраические с числом переменных z, меньшим n. Алгебраическая функция F от n переменных $z_1, \ldots, z_n$ представима в виде рациональной алгебраической суперпозиции, если

$$F = \Bigl(\sum \prod_{\alpha} F_\alpha\Bigr) \Big/ \Bigl(\sum \prod_{\beta} F_\beta\Bigr). \qquad (3)$$

В правой части стоит один из возможных результатов действия операторов дерева $\sum$ и $\prod$ на базисные функции F_α, F_β. Рациональная суперпозиция допустима, если знаменатель $\sum \prod_{\beta} F_\beta \not\equiv 0$ (по z). Понятие рациональной суперпозиции имеет смысл при $n \geqslant 2$. При $n \geqslant 3$ это понятие входит в более общее понятие о представлении F в виде строгой суперпозиции.

Частным случаем рациональной является полиномиальная алгебраическая суперпозиция. Алгебраическая функция F от n переменных $z_1, \ldots, z_n$ представима в виде полиномиальной алгебраической суперпозиции, если

$$F = \sum \prod_{\alpha} F_\alpha. \qquad (4)$$

Полиномиальная суперпозиция всегда допустима.

Вопрос о возможности представления функции F в виде полиномиальной суперпозиции может быть связан с мультипликативными свойствами некоторого полинома D_F из кольца $K[z_1, \ldots, z_n]$, который будет называться дискриминантом функции F. Полином D_F есть делитель полинома $D = D(z_1, \ldots, z_n)$ — дискриминанта относительно f определяющего полинома P функции F. Точное определение D_F будет дано ниже.

Полиномиальную алгебраическую суперпозицию назовем разделенной, если полный набор n переменных $z_1, \ldots, z_n$ можно разбить на s $(2 \leqslant s \leqslant n)$ непустых непересекающихся поднаборов таких, что каждая базисная функция F_α зависит от одного из этих поднаборов и только от него. Фактическая зависимость F_α от всех переменных своего поднабора не предполагается.

Будем говорить, что алгебраическая функция F имеет разделенные особенности, если ее дискриминант D_F разлагается в кольце $K[z_1, \ldots, z_n]$ на множители $D_F = D_1 \ldots D_s$, каждый из которых зависит от одного из указанных выше s поднаборов переменных z и только от него. Фактическая зависимость D_j $(j = 1, \ldots, s)$ от всех переменных своего поднабора не предполагается.

Теорема 1. *Для того чтобы алгебраическая функция F от n переменных $(n \geqslant 2)$ была представима в виде разделенной полиномиальной* *суперпозиции, необходимо и достаточно, чтобы она имела разделенные особенности. Причем разделения переменных в суперпозиции и дискриминанте D_F совпадают.*

В общем случае полиномиальной суперпозиции справедливо только необходимое аналогичное условие теоремы 1.

Теорема 1′. *Пусть алгебраическая функция F от n переменных ($n \geqslant 2$) представима в виде полиномиальной суперпозиции.*

Тогда ее дискриминант D_F разлагается в произведение полиномов

$$D_F = D_1 \ldots D_s, \tag{5}$$

каждый из которых не зависит, по крайней мере, от одного переменного z_i из полного набора $(z_1, \ldots, z_n)$.

Обратное утверждение, что из (5) следует представление (4), неверно.

Пример 1. Алгебраическая функция $F = \sqrt{\sqrt{z_1 - z_2} + \sqrt{z_1 - z_3}}$ от 3 переменных (K — поле комплексных чисел) имеет дискриминант $D_F = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)$ и не представима в виде полиномиальной алгебраической суперпозиции.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Если дискриминант D определяющего полинома P разлагается на два множителя, не имеющих общих переменных, то F представима в виде разделенной полиномиальной суперпозиции.*

Вопрос о возможности представления F в виде рациональной алгебраической суперпозиции связан с мультипликативными свойствами полинома D_b — дискриминанта ветвления функции F. Полином D_b есть делитель дискриминанта D_F. Точное его определение дано ниже.

Рациональную суперпозицию назовем разделенной, если в (3) числитель и знаменатель есть разделенные полиномиальные суперпозиции с одним и тем же разделением переменных.

Будем говорить, что F имеет разделенные особенности ветвления, если $D_b = D_1 \ldots D_s$ с указанным выше разделением переменных в полиномах $D_1, \ldots, D_s$.

Теорема 2. *Для того чтобы алгебраическая функция F от n переменных ($n \geqslant 2$) была представима в виде разделенной рациональной суперпозиции, необходимо и достаточно, чтобы она имела разделенные особенности ветвления. Разделения переменных в суперпозиции и дискриминанте D_b совпадают.*

В общем случае рациональной суперпозиции справедливо только необходимое условие теоремы 2.

Теорема 2′. *Если F представима в виде рациональной суперпозиции, то D_b разлагается в произведение полиномов $D_b = D_1 \ldots D_s$, каждый из которых не зависит, по крайней мере, от одного переменного z_i из полного набора $z_1, \ldots, z_n$.*

Обратное утверждение, как показывает функция из примера 1, неверно.

Из теоремы 2′ вытекает

Следствие 2 (достаточный признак непредставимости в виде рациональной суперпозиции). *Пусть степень по f определяющего полинома P $m \geqslant 2$. Пусть D неприводим и фактически зависит от всех переменных $z_1, \ldots, z_n$.*

Тогда представление (3) *для функции F невозможно.*

В частности,

Следствие 3. *Решение общего уравнения n-й степени* ($n \geqslant 2$)

$$f^n + z_1 f^{n-1} + \ldots + z_n = 0$$

не представимо в виде рациональной суперпозиции.

Замечание 1. Предположение о неприводимости определяющего полинома P в следствиях 1, 2 не является излишним. Простые примеры показывают, что в общем случае (для приводимых элементов замыкания $K\langle z_1, \ldots, z_n\rangle$) эти утверждения не верны.

Для того чтобы определить дискриминанты D_F и D_b, введем понятия регулярных и мероморфных элементов функции F.

Регулярный алгебраический элемент с центром в точке $k^0 = (k_1{}^0, \ldots, k_n{}^0) \in K^n$ есть формальный степенной ряд

$$f = \sum_{j_1+j\ldots+_n=0}^{\infty} k_{j_1,\ldots,j_n}(z_1 - k_1^0)^{j_1} \ldots (z_n - k_n^0)^{j_n}; \quad k_{j_1,\ldots,j_n} \in K, \tag{6}$$

удовлетворяющий некоторому алгебраическому уравнению (1). Два регулярных элемента полагаются равными в том и только том случае, когда совпадают их центры и все коэффиценты $k_{j_1,\ldots,j_n}$ при одинаковых степенях $z_1 - k_1{}^0, \ldots, z_n - k_n{}^0$.

Будем говорить, что функция F допускает выделение в точке $k^0 \in K^n$ регулярного элемента f, если существует ряд (6) с центром k^0, обращающий определяющий полином P в нуль при подстановке вместо f.

Функция F не допускает выделения m (m — степень P по f) различных регулярных элементов с одним и тем же центром $k^0 \in K^n$ тогда и только тогда, когда $k^0 = (k_1{}^0, \ldots, k_n{}^0)$ есть нуль некоторого полинома D_F из кольца $K[z_1, \ldots, z_n]$ (D_F — дискриминант функции F).

Обозначим через D' приведенный дискриминант определяющего полинома P, полученный после удаления из D кратных делителей. Тогда

$$D' = D_0 D_F. \tag{7}$$

Мероморфный алгебраический элемент g с центром в $k^0 \in K^n$ есть отношение двух регулярных элементов с тем же центром k^0. Два мероморфных элемента $g_1 = f_1 / f_2$, $g_2 = f_3 / f_4$ равны в том и только том случае, когда $f_1 f_4 = f_2 f_3$. Будем говорить, что F допускает выделение мероморфного элемента $g = f_1 / f_2$ с центром k^0, если $f_2{}^m P(f_1 / f_2, z_1, \ldots, z_n) = 0$ как регулярный элемент.

Функция F не допускает выделения m различных мероморфных элементов с одним и тем же центром k^0 тогда и только тогда, когда $k^0 \in K^n$ есть нуль некоторого полинома D_b.

Вместе с (7) получаем разложение

$$D' = D_0 D_p D_b,$$

D_b — дискриминант ветвления, D_p — «полюсный» дискриминант, D_0 — дискриминант пересечений (совпадение свободных членов у рядов (6)).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
9 VI 1971