Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 3

УДК 513.6 *МАТЕМАТИКА*

В. П. ПЛАТОНОВ

К ПРОБЛЕМЕ МАКСИМАЛЬНОСТИ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ГРУПП

(Представлено академиком Ю. В. Линником 25 III 1971)

В статье дается принципиальное решение проблемы классификации максимальных арифметических подгрупп линейных алгебраических групп. В основе метода лежит редукция к локальному случаю, опирающаяся на аппроксимационную теорему ([1, 2]).

Пусть Q — поле рациональных чисел или поле рациональных функций одной переменной с конечным полем констант, Z — кольцо целых элементов Q. G — связная Q-определенная алгебраическая группа. Подгруппа $H \subset G$ называется арифметической, если H соизмерима с G_Z.

Естественно возникает проблема описания максимальных арифметических подгрупп алгебраической группы G. Еще Гурвиц доказал, что для кольца Z целых чисел $SL(2, Z)$ — максимальная арифметическая подгруппа в $SL(2, R)$. В настоящее время известен ряд результатов, относящихся к этой проблеме над числовым полем ([3–8]). Более детальную библиографию можно найти в обзорной статье ([4]).

Прежде всего отметим, что группу G можно считать полупростой, как показывает следующее утверждение.

Предложение 1. *Если группа G обладает максимальной арифметической подгруппой, то она полупроста.*

Для полупростых групп все естественно сводится к исследованию основного случая Q-простой группы G. Так как случай конечной группы G_Z не представляет интереса с арифметической точки зрения, то будем в дальнейшем предполагать, что группа G_Z бесконечна. Хорошо известно тогда, что всякая арифметическая подгруппа $H \subset G$ содержится в конечном числе максимальных, а если центр группы G тривиален, то $H \subset G_Q$ ([3]). В частности, при тривиальном центре описание максимальных арифметических подгрупп в G_Q эквивалентно описанию максимальных арифметических подгрупп в G. Хотя в общем случае это не так, тем не менее описание максимальных арифметических подгрупп в группе G_Q имеет важное значение.

Пусть Q_p — поле p-адических чисел, Z_p — кольцо целых p-адических чисел (мы ограничимся в дальнейшем основным случаем числового поля Q; для функционального поля большинство рассуждений аналогично).

Если $H \subset G_Q$, тогда $H \subset G_{Q^p}$ и можно рассматривать замыкания $\overline{H}^{(p)}$ группы H в локально компактной p-адической топологии группы G_{Q_p}. Группы $\overline{H}^{(p)}$ компактны и открыты для всех p. В ряде работ (см. ([8, 10])) сформулирована гипотеза максимальности: если G без центра, то для всякой максимальной арифметической подгруппы H группы $\overline{H}^{(p)}$ являются максимальными компактными в G_{Q_p} для всех p. Основной результат в ([5]) утверждает, что гипотеза максимальности верна для проективной группы $G = PSL(n)$. Однако этот результат ошибочен, как показывает

Предложение 2. *Пусть φ — канонический морфизм* $SL(2) \to$ $\to PSL(2)$; $H = \left\{SL(2, Z), \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}\right\} \subset SL(2)$.

Тогда $\varphi(H)$ — максимальная арифметическая подгруппа $PSL(2)$ и для бесконечного множества простых p подгруппа $\overline{\varphi(H)}^{(p)}$ не является максимальной компактной в $PSL(2)_{Q_p}$.

Аналогичные контрпримеры получаются и для $n > 2$. Следовательно, в общем случае гипотеза максимальности неверна и, как мы увидим, связь с локальным случаем оказывается более тонкой.

Лемма 1. *Пусть $f\colon G \to G'$ — некоторая Q-изогения.*

Тогда для всякой максимальной арифметической подгруппы $M \supset G$, $f(M)$ — максимальная арифметическая подгруппа G' и аналогичное верно для f^{-1}.

Лемма 1 показывает, что достаточно классифицировать максимальные арифметические подгруппы в односвязной группе $\tilde{G}$ или присоединенной группе $G' = AdG$.

Лемма 2. *Пусть H — арифметическая подгруппа группы G.*

Тогда $H_Q = H \cap G_Q$ содержит коммутант группы H и конечная абелева группа H/H_Q имеет экспоненту, делящую экспоненту центра группы G. Если H максимальна в G, то нормализатор $N_G(H_Q) = H$.

Будем в дальнейшем предполагать, что группа G односвязна (и полупроста). Тогда для G верна сильная аппроксимационная теорема ([1]).

Лемма 3. *Если H — арифметическая подгруппа из G_Q, то для почти всех p группа $\overline{H}^{(p)} = G_{Z_p}$ и является максимальной компактной подгруппой G_{Q_p}.*

Доказательство леммы 3 вытекает из аппроксимационной теоремы и следующего общего факта: для почти всех p группы G_{Z_p} являются максимальными компактными в G_{Q_p}. Этот последний факт доказывается переходом к Q-оболочке группы H и рассмотрением в ней максимальных порядков.

С помощью леммы 3 легко доказывается

Лемма 4. *Существует такая рациональная матрица h, что группа $G' = hGh^{-1}$ обладает свойством: G_{Z_p} — максимальная компактная подгруппа в G_{Q_p} для всех p.*

Лемма 4 позволяет в дальнейшем, не ограничивая общности, считать, что G обладает указанным в ней свойством.

Предложение 3. *Если H — арифметическая подгруппа, максимальная в G_Q, то $\overline{H}^{(p)}$ — максимальная компактная подгруппа G_{Q^p} для всех p.*

Верно и обратное: *если $\overline{H}^{(p)}$ — максимальные компактные подгруппы для всех p и $\bigcap\limits_p \overline{H}^{(p)} = H$, то H — максимальная арифметическая подгруппа G_Q.*

Доказательство легко получается с помощью аппроксимационной теоремы. Докажем первую часть предложения 3. Предположим, что для некоторого p_1 группа $\overline{H}^{(p_1)}$ не является максимальной компактной и содержится в компактной группе B_1. По лемме 3 группа $\Delta = B_1 \times \prod\limits_{p \neq p_1} \overline{H}^{(p)}$ открыта в группе конечных аделей $G_{A(f)}$. Тогда по аппроксимационной теореме ([1]) группа $G_Q \cap \Delta$ плотна в Δ и содержит H. Но $\overline{(G_Q \cap \Delta)}^{(p_1)} = B_1 \neq \overline{H}^{(p_1)} \Rightarrow G_Q \cap \Delta \neq H$. Остается заметить, что $G_Q \cap \Delta$ является арифметической подгруппой, а это противоречит максимальности H.

Предложение 4. *Максимальные арифметические подгруппы H_1, H_2 группы G_Q тогда и только тогда сопряжены в G_Q, если $\overline{H}_1^{(p)}$ и $\overline{H}_2^{(p)}$ сопряжены в G_{Q_p} для всех p.*

Доказательство. Пусть $\overline{H}_1^{(p)}$ и $\overline{H}_2^{(p)}$ сопряжены в G_{Q_p} для всех p. Тогда нетрудно видеть, что множество

$$R = \left\{ g \in G_{A(f)} \mid g \left(\prod_p \overline{H}_1^{(p)} \right) g^{-1} = \prod_p \overline{H}_2^{(p)} \right\}$$

открыто в группе аделей $G_{A(f)}$. Следовательно, по аппроксимационной теореме пересечение $G_Q \cap R$ плотно в R. Если $r \in G_Q \cap R$, то $r\overline{H}_1^{(p)}r^{-1} = \overline{H}_2^{(p)}$ для всех p. Тогда $rH_1r^{-1} \subseteq \bigcap\limits_p \overline{H}_2^{(p)}$. Ввиду максимальности H_2 и арифметичности $\bigcap\limits_p \overline{H}_2^{(p)}$, $H_2 = \bigcap\limits_p \overline{H}_2^{(p)}$. Значит, $rH_1r^{-1} = H_2$.

Существенное значение имеет локальный аналог проблемы максимальности, а именно, описание максимальных Z_p-арифметических подгрупп группы G. Если группа G без центра, то в этом случае максимальные Z_p-арифметические подгруппы G совпадают с множеством максимальных компактных подгрупп группы G_{Q_p}. Описание максимальных компактных подгрупп группы G не так давно получено в серии статей (9) (см. также (11) для разложимых групп). Оказывается, максимальные компактные подгруппы G_{Q_p} совпадают с максимальными парахорическими подгруппами. Число классов сопряженных максимальных компактных подгрупп группы G_{Q_p} конечно и в случае простой группы G равно $l_p + 1$, где l_p есть Q_p-ранг группы G (напомним, что группа G предполагается односвязной). Отметим, что полное изложение результатов Брюа и Титса (9) еще не появилось.

Теперь мы располагаем необходимыми фактами, чтобы непосредственно заняться проблемой классификации максимальных арифметических подгрупп.

Прежде всего дадим принципиально полное решение для групп G без центра, в частности, для любых групп G типа E_8, F_4 или G_2. Для этих групп, с одной стороны, рассуждения особенно прозрачны и в определенной мере отражают общую ситуацию, а, с другой,— здесь верна обсуждавшаяся выше гипотеза максимальности.

Пусть $B_i^{(p)}$, $i = 1, 2, \ldots, j_p$, $j_p = l_p + 1$,— произвольные представители классов сопряженных максимальных компактных подгрупп группы G_{Q_p}. Для произвольного конечного набора $S = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}$ различных простых чисел обозначим через $G_{Z(p_1, p_2, \ldots, p_k)}$ подгруппу S-единиц группы G.

$$H(p_1, p_2, \ldots, p_k; i_1, i_2, \ldots, i_k) = G_{Z(p_1, \ldots, p_k)} \cap \Big(\bigcap_{d=1}^{k} B_{i_d}^{(p_d)}\Big),$$

где $1 \leqslant i_d \leqslant l_{p_d} + 1$, т. е. $B_{i_d}^{(p_d)}$ — это произвольные (!) из выделенных выше попарно несопряженных максимальных компактных подгрупп групп $G_{Q_{p_d}}$, $d = 1, 2, \ldots, k$.

Теорема 1. *Пусть G — односвязная группа без центра.*

Тогда $H(p_1, \ldots, p_k;\ i_1, \ldots, i_k)$ — *максимальные арифметические подгруппы группы G. Всякая максимальная арифметическая подгруппа группы G G_Q-сопряжена одной и только одной из построенных групп.*

Доказательство. Пусть $F = \Big(\prod\limits_{d=1}^{k} G_{Q_{p_d}}\Big) \times \Big(\prod\limits_{p \notin S} G_{Z_p}\Big)$. По аппроксимационной теореме группа $G_{Z(p_1, \ldots, p_k)}$ является плотной подгруппой F. Следовательно, $H(p_1, \ldots, p_k;\ i_1, \ldots, i_k)$ — плотная подгруппа в $\Big(\prod\limits_{d=1}^{k} B_{i_d}^{(p_d)}\Big) \times \Big(\prod\limits_{p \notin S} G_{Z_p}\Big)$, в частности $\overline{H(p_1, \ldots, p_k; i_1, i_2, \ldots, i_k)}^{(p)} = B_{i_d}^{(p_d)}$ или G_{Z_p}, в зависимости от того, $p = p_d$, $d = 1, 2, \ldots, k$, или $p \notin S$. По построению, $\Big(\bigcap\limits_{d=1}^{k} B_{i_d}^{(p_d)}\Big) \cap \Big(\bigcap\limits_{p \notin S} G_{Z_p}\Big) \subset G_{Z(p_1, \ldots, p_k)}$ и G_{Z_p} — максимальные компактные подгруппы G_{Q_p}. Значит, $H(p_1, \ldots, p_k;\ i_1, \ldots, i_k)$ — максимальная арифметическая подгруппа в G_Q (предложение 3). Остается заметить, что всякая арифметическая подгруппа G содержится в G_Q.

Что касается второго утверждения теоремы 1, то оно выводится из предложений 3, 4 и леммы 3.

Теорема 1 доказана.

В общем случае конструкция усложняется. Максимальных компактных групп $B_{i_d}^{(p_d)}$ уже недостаточно для построения всех максимальных арифметических Q-подгрупп (см. предложение 2). Класс максимальных компактных подгрупп необходимо расширить, заменив его классом максимальных Z_p-арифметических подгрупп группы G. В силу леммы 1, множество всех максимальных Z_p-арифметических подгрупп группы G есть прообраз множества максимальных компактных подгрупп группы $(AdG)_{Q_p}$. Для всякой максимальной Z_p-арифметической подгруппы $B^{(p)}$ группы G пусть $B^{(p)}(Q_p) = B^{(p)} \cap G_{Q_p}$. Из [9] выводится, что группы $B^{(p)}(Q_p)$ образуют конечное число классов сопряженных в G_{Q_p}, ибо $B^{(p)}$ есть канонический прообраз некоторой максимальной компактной подгруппы из $\mathrm{Ad}(G)_{Q_p}$.

Через $B_i^{(p)}(Q_p)$, $i = 1, 2, \ldots, j_p$, обозначим произвольных представителей классов сопряженных подгрупп, получаемых указанной выше конструкцией. Как и в теореме 1, для произвольного $S = (p_1, p_2, \ldots, p_k)$ рассмотрим

$$\bar{H}(p_1, \ldots, p_k; i_1, \ldots, i_k) = N_G\left(G_{Z(p_1, \ldots, p_k)} \cap \left(\bigcap_{d=1}^{k} B_{i_d}^{(p_d)}(Q_{p_d})\right)\right),$$

где $1 \leqslant i_d \leqslant j_{p_d}$.

Теорема 2. *Всякая максимальная арифметическая подгруппа группы G G_Q-сопряжена одной и только одной из пространственных групп $\bar{H}(p_1, \ldots, p_k; i_1, \ldots, i_k)$.*

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству второй части теоремы 1 и дополнительно использует лемму 2.

Первое утверждение теоремы 1 отсутствует в теореме 2. Примеры показывают, что оно не верно в общем случае. Поэтому в общей ситуации необходимо пользоваться алгоритмом сравнения, чтобы из множества групп $\bar{H}(p_1, \ldots, p_k; i_1, \ldots, i_k)$ удалить немаксимальные.

Следующая теорема указывает широкий класс групп, для которых верен полный аналог теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть G — разложимая группа (за исключением, возможно, групп типа D_n).*

Тогда всякая подгруппа $\bar{H}(p_1, \ldots, p_i; i_1, \ldots, i_k)$ максимальна в G и этими подгруппами с точностью до G_Q-сопряженности исчерпываются все максимальные арифметические подгруппы группы G.

Доказательство использует специфическую структуру каждого из типов разложимых групп.

Для специальной линейной группы и симплектической группы теорема 3 фактически доказана соответственно в [8] и [5]. Для групп G типов E_8, F_4 или G_2 теорема 3, разумеется, является весьма частным случаем теоремы 1.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина
Минск

Поступило
22 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Платонов, Изв. АН СССР, сер. матем., 33, № 6, 1211 (1969). [2] В. П. Платонов, Изв. АН СССР, сер. матем., 34, № 4, 775 (1970). [3] A. Borel, J. Reine und Angew. Math., 224, 78 (1966). [4] N. Allan, Proc. Sump. Pure Math., A.M.S., 9, 104 (1966). [5] N. Allan, Bull. Am. Math. Soc., 74, № 1 (1968). [6] H. Maass, Math. Zs., 51, 255 (1948). [7] H. Matsumoto, C. R., Ser. A, 262, 1040 (1966). [8] Л. А. Гутник, И. И. Пятецкий-Шапиро, Тр. Московск. матем. общ., 15, 279 (1966). [9] F. Bruhat, J. Tits, C. R., 263, № 23 A (1966). [10] И. И. Пятецкий-Шапиро, Тр. Международн. матем. конгр., М., 1968, стр. 232. [11] N. Iwahori, H. Matsumoto, Publ. Math., I.H.E.S., № 25, 5 (1965).