Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 3

УДК 513.731 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. В. ПОГОРЕЛОВ

О РЕГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $\det(\partial^2 u/\partial x^i \partial x^j) = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) > 0$

Пусть в области G переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ рассматривается уравнение

$$\det(\partial^2 u / \partial x^i \partial x^j) = \varphi(x^1, x^2, \ldots, x^n) > 0. \tag{1}$$

Пусть $u(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — выпуклая функция, заданная в G и F: $z = u(x)$ — задаваемая ею гиперповерхность. Нормальное отображение гиперповерхности F состоит в сопоставлении точке (x, z) гиперповерхности точек (p), декартовы координаты которых являются угловыми коэффициентами опорных гиперплоскостей F в точке (x, z). Если гиперповерхность F гладкая, то образ точки (x, z) при нормальном отображении единственный и

$$p_1 = \partial z / \partial x^1, \quad p_2 = \partial z / \partial x^2, \ldots, \quad p_n = \partial z / \partial x^n.$$

Образ борелевского множества при нормальном отображении выпуклой гиперповерхности является тоже борелевским множеством.

Выпуклая функция $u(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ называется обобщенным решением уравнения (1) в области G, если для любого борелевского множества M на гиперповерхности F: $z = u(x)$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\omega(M)} dp_1 dp_2 \ldots dp_n = \int\limits_{\overline{M}} \varphi\, dx^1 dx^2 \ldots dx^n, \tag{2}$$

где $\omega(M)$ — нормальное изображение множества M, а $\overline{M}$ — его проекция на гиперплоскость $z = 0$. Дважды дифференцируемое обобщенное решение уравнения (1) удовлетворяет этому уравнению в обычном смысле. Существуют простые и достаточно эффективные геометрические приемы построения обобщенных решений, удовлетворяющих тем или другим дополнительным условиям [1, 2]. В частности, задача Дирихле для уравнения (1) в строго выпуклой области G неограничено разрешима. Именно для любой непрерывной положительной функции φ, заданной в G, и любой непрерывной функции ψ, заданной на границе G, существует обобщенное решение уравнения (1) в области G, принимающее на ее границе значения ψ. Целью настоящей заметки является исследование регулярности обобщенных решений уравнения (1) в зависимости от регулярности правой части уравнения φ.

Теорема 1. *Если правая часть уравнения* (1) *положительна и принадлежит классу* C^k, $k \geqslant 3$, *то любое строго выпуклое обобщенное решение этого уравнения принадлежит по крайней мере классу* $C^{k+1+\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. *Если правая часть уравнения аналитическая, то решение аналитическое.*

Требование строгой выпуклости решения в условии теоремы при $n > 2$ существенно, как показывает следующий пример.

Функция

$$u(x) = (1 - x'^2)^{2/n-1} \Big(\sum_{k>1} (x^k)^2\Big)^{(n-1)/n}$$

в области G: $|x| < 1$ является обобщенным решением уравнения (1) с аналитической положительной правой частью (φ). Однако это решение не принадлежит даже классу C^2.

Доказательство теоремы 1 в существенной части опирается на следующую теорему, представляющую самостоятельный интерес.

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ — регулярное решение уравнения* (1) *в конечной выпуклой области G, удовлетворяющее краевому условию*

$$u = c_1x^1 + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + c_0, \tag{3}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n, c_0$ — постоянные.

Тогда для вторых производных решения внутри области G можно указать оценку в зависимости от максимума модуля решения и его производных первого порядка, максимума и минимума функции φ и ее производных до второго порядка и расстояния до границы области.

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$w = \zeta e^{u_\alpha^2/2} u_{\alpha\alpha}, \tag{4}$$

$$\zeta = c_1x^1 + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + c_0 - u(x).$$

Индексом α указано дифференцирование по фиксированному направлению. Очевидно, функция w достигает максимума в некоторой точке O области G Примем направление α за координатное, а другие оси координат выберем так, чтобы в точке O было $u_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и чтобы переход к новым координатам был унимодулярным. Прологарифмируем равенство (4) и продифференцируем его дважды по x_i. Тогда в точке O, где w достигает максимума, будем иметь

$$\frac{u_{\alpha\alpha i}}{u_{\alpha\alpha}} + u_\alpha u_{\alpha i} + \frac{\zeta_i}{\zeta} = 0; \tag{5}$$

$$\frac{u_{\alpha\alpha ii}}{u_{\alpha\alpha}} - \left(\frac{u_{\alpha\alpha i}}{u_{\alpha\alpha}}\right)^2 + u_{\alpha i}^2 + u_\alpha u_{\alpha ii} - \frac{u_{ii}}{\zeta} - \left(\frac{\zeta_i}{\zeta}\right)^2 = \frac{w_{ii}}{w}. \tag{6}$$

Умножая равенство (6) на $u_{\alpha\alpha} / u_{ii}$ и суммируя по i, с помощью равенства (5) получим

$$\sum_i \frac{u_{ii\alpha\alpha}}{u_{ii}} - \sum_i \frac{(u_{\alpha\alpha i})^2}{u_{\alpha\alpha}u_{ii}} - \frac{nu_{\alpha\alpha}}{\zeta} - \sum_{i\neq\alpha} \frac{(u_{\alpha\alpha i})^2}{u_{\alpha\alpha}u_{ii}} -$$
$$- \left(\frac{\zeta_\alpha}{\zeta}\right)^2 + u_{\alpha\alpha}^2 + u_\alpha u_{\alpha\alpha} \sum_i \frac{u_{\alpha ii}}{u_{ii}} = \sum_i \frac{w_{ii}}{w}\frac{u_{\alpha\alpha}}{u_{ii}}. \tag{7}$$

Теперь продифференцируем уравнение (1) дважды по x^α в точке O. Получим

$$\sum_i \frac{u_{ii\alpha}}{u_{ii}} = \frac{\varphi_\alpha}{\varphi} = (\ln\varphi)_\alpha; \tag{8}$$

$$\sum_i \frac{u_{ii\alpha\alpha}}{u_{ii}} + \sum_{i\neq j}\left(\frac{u_{ii\alpha}u_{jj\alpha}}{u_{ii}u_{jj}} - \frac{(u_{ij\alpha})^2}{u_{ii}u_{jj}}\right) = \frac{\varphi_{\alpha\alpha}}{\varphi}. \tag{9}$$

Возводя равенство (8) в квадрат и вычитая его из (9), получим

$$\sum_i \frac{u_{ii\alpha\alpha}}{u_{ii}} - \sum_{i,\,j} \frac{(u_{ij\alpha})^2}{u_{ii}u_{jj}} = (\ln\varphi)_{\alpha\alpha}. \tag{10}$$

Вычитая равенства (7) и (10) почленно и замечая, что в точке O $w_{ii} \leqslant 0$, получим

$$-\frac{nu_{\alpha\alpha}}{\zeta} - \frac{\zeta_\alpha^2}{\zeta^2} + u_{\alpha\alpha}^2 + u_\alpha u_{\alpha\alpha}(\ln\varphi)_\alpha + (\ln\varphi)_{\alpha\alpha} \leqslant 0. \tag{11}$$

В левой части неравенства опущены неотрицательные слагаемые вида $(u_{ij\alpha})^2 / u_{ii}u_{jj}$ $(i, j \neq \alpha)$.

Умножая неравенство (11) на $\zeta^2 e^{u_\alpha^2}$ и вводя w, получим

$$w^2 + Aw + B \leqslant 0, \tag{12}$$

где A и B допускают оценку в зависимости от указанных в теореме 2 величин. Из неравенства (12) очевидным образом получается оценка для w. Если ее обозначить через w_0, то всюду в области G

$$u_{\alpha\alpha} \leqslant w_0 / \zeta.$$

Очевидно, для ζ имеет место оценка снизу вида $\zeta > c\delta$, где δ — расстояние до границы области G. Поэтому

$$u_{\alpha\alpha} < w_0 / (c\delta).$$

Так как α — произвольное направление, то полученная оценка для $u_{\alpha\alpha}$ завершает доказательство. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Пусть F — гиперповерхность, задаваемая решением $z = u(x)$. Не ограничивая общности, будем рассматривать не всю гиперповерхность F, а окрестность произвольной ее точки, отсекаемую гиперплоскостью. Чтобы не вводить новых обозначений, сохраним за этой окрестностью то же обозначение F. Для простоты вывода будем предполагать гладкость (C^1) гиперповерхности F.

Рассмотрим контактное преобразование гиперповерхности F. Это преобразование состоит в сопоставлении точке (x) гиперповерхности F точки (y) с координатами

$$y_1 = u_1, \quad y_2 = u_2, \ldots, \quad y_n = u_n,$$
$$y_0 = u - u_1 x^1 - u_2 x^2 - \ldots - u_n x^n,$$

где $u_k = \partial u / \partial x^k$. Когда точка (x) описывает гиперповерхность F, ее образ (y) описывает гладкую строго выпуклую гиперповерхность F_1 с опорной функцией

$$H = y_0 u\left(\frac{y_1}{y_0}, \frac{y_2}{y_0}, \ldots, \frac{y_n}{y_0}\right),$$

касающуюся вдоль края некоторого выпуклого конуса. Если край гиперповерхности F лежит в гиперплоскости $z = c_1 x^1 + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + c_0$, то вершиной конуса V_1 является точка $(c_0, c_1, \ldots, c_n)$.

Возьмем на луче, исходящем из вершины конуса V_1, проходящем внутри конуса, на достаточном удалении точку O. Построим конус V_2 и гиперповерхность F_2, симметричные конусу V_1 и гиперповерхности F_1 относительно точки O. При достаточном удалении точки O по лучу гиперповерхности F_1 и F_2 будут внутри обоих конусов V_1 и V_2. Построим выпуклую оболочку гиперповерхностей F_1 и F_2. Обозначим ее через Φ. Она имеет центр симметрии O и гиперповерхности F_1 и F_2 являются симметрично расположенными на ней частями.

Гиперповерхность F_1 имеет в каждой точке определенную гауссову кривизну K, если ее определять как предел отношения площади сферического изображения к площади поверхности. Эта кривизна просто связана с правой частью φ уравнения (1). Именно, в точке с нормалью направления $(1, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ гауссова кривизна K определяется по формуле

$$1 / K = (1 + (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2)^{n/2+1} \varphi.$$

Отсюда следует, что если $\varphi \subset C^k$, то и $K \subset C^k$.

Обозначим через S поверхностную функцию гиперповерхности Φ. Так называется функция множеств на единичной сфере, значение которой на произвольном множестве M есть площадь $S(M)$ множества тех точек гиперповерхности Φ, которое имеет своим сферическим изображением M. Построим на единичной сфере положительную, класса C^1, функцию K_m, удовлетворяющую условиям: 1) функция множеств

$$S_m(M) = \int_M \frac{dM}{K_m}$$

симметрична относительно центра сферы и слабо сходится к $S(M)$ при $m \to \infty$; 2) на любой компактной части сферического изображения гиперповерхности F_1 функции K_m равномерно сходятся к K вместе с производными до третьего порядка.

Построим замкнутую выпуклую гиперповерхность Φ_m с гауссовой кривизной $K_m(\nu)$ в точке с внешней нормалью ν (проблема Минковского). Ввиду симметрии функции S_m необходимое условие существования поверхности Φ_m выполнено

$$\int_\omega \nu \, dS_m = 0.$$

Поверхность Φ_m принадлежит классу C^5 ([3]). В силу единственности решения проблемы Минковского при $m \to \infty$ гиперповерхности Φ_m сходятся к Φ.

Обозначим через $H_m(x^0, x^1, \ldots, x^n)$ опорную функцию гиперповерхности Φ_m, а ее значения при $x^0 = 1$ обозначим через

$$u_m(x) = H_m(1, x^1, x^2, \ldots, x^n).$$

Так как гиперповерхности Φ_m сходятся к Φ при $m \to \infty$, то функции $u_m(x) \to u(x)$. Положим

$$\varphi_m(x) = \varphi(x) K / K_m.$$

При $m \to \infty$ φ_m сходятся к φ равномерно вместе с третьими производными в любой компактной части G. Функции u_m в области G удовлетворяют уравнению

$$\det(\partial^2 u / \partial x^i \partial x^j) = \varphi_m. \tag{*}$$

Фиксируем теперь компактное множество M в области G. По теореме 2 для вторых производных решения $u_m(x)$ уравнения (*) имеют место априорные оценки. Эти оценки можно считать равномерными при достаточно больших m. Имея оценки для вторых производных, можно получить априорные оценки для третьих производных ([3]). Эти оценки гарантируют принадлежность предельной функции $u(x) = \lim u_m(x)$, по крайней мере, классу $C^{2,1}$. Согласно общей теореме о регулярности решений уравнений эллиптического типа, из принадлежности решения $u(x)$ уравнения (1) классу $C^{2,1}$ следует его принадлежность классу $C^{k+1+\alpha}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 3. *Теорема 1 имеет место, если условие строгой выпуклости решения заменить линейным краевым условием на границе области G*

$$u = c_0 + c_1 x^1 + \ldots + c_n x^n.$$

Следствие. *Теорема 1 имеет место, если заменить требование строгой выпуклости решения требованием полноты поверхности, задаваемой решением.*

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
17 V 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Погорелов, Об уравнениях Монжа — Ампера эллиптического типа, 1960. [2] А. Д. Александров, Вестн. Ленингр. унив., № 1 (1958). [3] А. В. Погорелов, ДАН, 199, № 4 (1971).