Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 3

УДК 517.946.59 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Э. А. ПОЛЯНСКИЙ, М. В. ФЕДОРЮК

СВЕДЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПОЛУЦИЛИНДРЕ К СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ШРЕДИНГЕРА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 31 III 1971)

1. Рассмотрим краевую задачу

$$d^2u/dx^2 = Au,\ 0 < x < +\infty;\quad u(0) = u_0,\quad |u(+\infty)| < \infty, \tag{1}$$

и задачу Коши

$$dv/dx = -Av,\ 0 < x < +\infty,\quad v(0) = u_0. \tag{2}$$

Рассмотрим вначале пример: A — скаляр, $\operatorname{Re} A > 0$. Мы хотим построить линейный оператор $\mathscr{L}$ такой, что $u = \mathscr{L}v$, т. е. выразить решение краевой задачи (1) через решение задачи Коши (2). Имеем $u = \exp(-x\sqrt{A})u_0$, $v = \exp(-xA)u_0$, и при $\operatorname{Re} p > 0$, $\operatorname{Re} A > 0$, $p \neq 0$ справедлива формула ([1])

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{A}{4t} - pt\right)dt = \sqrt{\frac{\pi}{p}} \exp(-\sqrt{pA}). \tag{3}$$

Следовательно, при $x > 0$

$$u(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-tx} v\left(\frac{x}{4t}\right)dt. \tag{4}$$

Тем самым $u(x)$ выражено через $v(x)$.

Мы докажем формулу (3) для некоторого класса линейных замкнутых операторов A с плотной областью определения, действующих в банаховом пространстве B. В п. 2 мы применим эти результаты к уравнениям с частными производными.

Формула (4) сводит решение краевой задачи (1) к решению задачи Коши (для частных производных — к решению смешанной задачи — см. п. 2) и квадратуре, что значительно упрощает численное решение задачи (1) на ЭВМ.

Теорема 1. *Пусть резольвента $R(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$ существует и удовлетворяет оценке*

$$\|R(\lambda)\| \leqslant c(1 + |\lambda|)^{-1} \quad (\operatorname{Re}\lambda \leqslant \omega_0,\ \omega_0 > 0). \tag{5}$$

Тогда при $p > 0$ справедлива формула (3).

Доказательство. Имеем при $t > 0$

$$\exp(-tA) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega - i\infty}^{\omega + i\infty} e^{-t\lambda} R(\lambda)\,d\lambda; \tag{6}$$

$$\exp(-t\sqrt{A}) = \frac{1}{2\pi i} \int e^{-t\sqrt{\lambda}} R(\lambda)\,d\lambda, \tag{7}$$

где $0 < \omega < \omega_0$ и γ — граница полуполосы $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \varepsilon$, $-\infty < \operatorname{Re}\lambda < \delta < \omega_0$. Здесь $\varepsilon > 0$ и для $\sqrt{\lambda}$ выбрана главная ветвь. Интегрируя по частям, получаем, что при $t > 0$

$$\exp\left(-\frac{A}{4t}\right) = \frac{2t}{\pi i} \int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} e^{-\lambda/(4t)} R'(\lambda)\, d\lambda.$$

Подставляя эту формулу в левую часть (3), получаем абсолютно сходящийся двойной интеграл. Переставим порядок интегрирования; тогда интеграл по dt берется, и мы получаем, что левая часть (3) равна

$$\frac{2i}{\pi} \int\limits_{\omega-i\infty}^{\omega+i\infty} \frac{d}{dp}\left(\sqrt{\frac{\pi}{p}}\, e^{-\sqrt{\lambda p}}\right) R'(\lambda)\, d\lambda.$$

Из (5) и выбора ветви $\sqrt{\lambda}$ следует, что контур интегрирования можно продеформировать в контур γ (см. (7)). Интегрируя по частям $R'd\lambda = dR$ и используя (7), получаем правую часть (3).

Теорема 2. *Пусть резольвента $R(\lambda)$ существует и удовлетворяет оценке* (5) *при* $\operatorname{Im}\lambda \geqslant -\omega_0$, *где* $\omega_0 > 0$.

Тогда при $x > 0$ справедлива формула

$$\int\limits_0^\infty t^{-1/2} e^{itx} \exp\left(-\frac{iAx}{4t}\right) dt = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\pi}{x}} \exp(-x\sqrt{A}). \tag{8}$$

Доказательство. Интеграл в левой части (8) не сходится абсолютно, и мы определим его как $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \int\limits_0^\infty f(t, x)\varphi(\varepsilon t)\, dt$, где $f(t, x)$ — подынтегральное выражение из (8). Здесь функция $\varphi(t) \in C^\infty[0, \infty)$ равна нулю при $t > 1$ и равна 1 при $0 \leqslant t \leqslant 0{,}5$. Обозначим через $F(x, \varepsilon, \varphi)$ левую часть (8), где под знак интеграла внесена срезающая функция $\varphi(\varepsilon t)$. Как и в теореме 1, проинтегрируем интеграл $\exp(-iAx/(4t))$ по частям; тогда мы получим абсолютно сходящийся двойной интеграл $F(x, \varepsilon, \varphi)$. Переставляя порядок интегрирования, получаем, что интеграл по dt имеет вид $\Phi(\varepsilon, x, \varphi) = -\frac{2}{\pi x} \int\limits_0^\infty t^{1/2} \exp\left(-\frac{i\lambda x}{4t} + ixt\right) \varphi(\varepsilon t)\, dt$, где $\lambda \in (-i\omega - \infty, -i\omega + \infty)$, $\omega > 0$. Обычным способом доказывается, что $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \Phi(\varepsilon, x, \varphi)$ существует и не зависит от φ и этот предел равен $\psi_0(x, \lambda) = -ie^{i\pi/4}\sqrt{\frac{\pi}{x}}(x^{-3/2} + \lambda^{1/2}x^{-1/2}) \exp(-x\sqrt{\lambda})$. Здесь для $\sqrt{\lambda}$ выбрана главная ветвь. Итак, левая часть (8) равна

$$\int\limits_{-i\omega-\infty}^{-i\omega+\infty} \psi_0(x, \lambda) R'(\lambda)\, d\lambda.$$

Деформируя контур интегрирования в контур γ (возможность этого доказывается так же, как и в теореме 1) и интегрируя по частям $R'd\lambda = dR$, получаем правую часть (8).

Теорема 3. *Пусть* $u_0 \in D(A^{-\alpha})$ *для некоторого* $\alpha > 0$.

Тогда

1) *Если выполнены условия теоремы* 1, *то при* $x > 0$ *имеет место формула* (4);

2) *Пусть выполнены условия теоремы* 2, *и пусть* $w(x)$ — *решение задачи*

$$dw/dx = iAw, \quad 0 < x < \infty, \quad w(0) = u_0. \tag{9}$$

Тогда при $x > 0$

$$u(x) = \sqrt{\frac{x}{\pi}}\, e^{-i\pi/4} \int_0^\infty t^{-1/2} \exp(itx)\, w\left(\frac{x}{4t}\right) dt, \tag{10}$$

где $u(x)$ — решение задачи (1).

Доказательство следует из теорем 1, 2 и явных формул для решений задач (1), (2), (9) (см., например, [2]).

2. Применим полученные результаты к уравнениям с частными производными.

1°. Рассмотрим уравнение Гельмгольца в полосе Π: $0 < x < +\infty$, $0 < y < l$:

$$\Delta u + k^2 n^2(y) u = 0. \tag{11}$$

Поставим краевые условия

$$\partial u / \partial y + ikg_0 u = 0,\ y = 0; \quad \partial u / \partial y - ikg_1 u = 0,\ y = l; \tag{12}$$

начальное условие

$$u(0, y, k) = f(y, k), \quad 0 \leqslant y \leqslant l, \tag{13}$$

и условия на бесконечности

$$\int_0^l |u|^2 dy = o(1), \quad \int_0^l |u_x|^2 dy = o(1) \quad (x \to +\infty). \tag{14}$$

Пусть $n^2(y)$ — достаточно гладкая функция, $n^2(y) > 0$, $y \in [0, l]$, $k > 0$, $g_0 > 0$, $g_1 > 0$ и $f(y, k) \in C_0^\infty([0, l])$. Задача (11) — (14) — это задача о нахождении звукового поля в волноводе с поглощающими границами [3]. В данном случае A — оператор в $L_2(0, l)$, порожденный выражением $-\partial^2 / \partial y^2 + k^2 n^2(y)$ и краевыми условиями (12). В силу выбора g_j и $n^2(y)$ условия теорем 1 и 2 выполнены. Следовательно, справедливы (4), (10), где v, w — решения уравнений теплопроводности и Шредингера соответственно:

$$k\, \partial v / \partial x = \partial^2 v / \partial y^2 + k^2 n^2(y) v, \quad -ik\, \partial w / \partial x = \partial^2 w / \partial y^2 + k^2 h^2(y) w$$

с данными Коши (13) и краевыми условиями (12).

2°. Пусть $S \subset R^{n-1}_{x'}$ — ограниченная область с границей класса C^∞, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, и $\Gamma = S \times \{x_n\colon 0 \leqslant x_n < +\infty\}$ — полуцилиндр. Рассмотрим уравнение

$$\mathscr{L} u \equiv (\partial^2/\partial x_n^2 - A(x', \partial/\partial x'))\, u = 0 \quad (x', x_n) \in \Gamma. \tag{15}$$

Поставим краевое условие

$$\partial u / \partial n + g(x') u|_{\Gamma'} = 0 \quad (\text{или } u|_{\Gamma'} = 0), \tag{16}$$

где Γ' — боковая поверхность полуцилиндра, $\partial / \partial n$ — производная по нормали к Γ'; начальное условие

$$u(0, x') = f(x') \tag{17}$$

и условия убывания решения при $x_n \to +\infty$

$$\int_S (|u(x', x_n)|^2 + |\partial u(x', x_n)/\partial x_n|^2)\, dx' = o(1) \quad (x_n \to +\infty). \tag{18}$$

Оператор $\mathscr{L}$ — эллиптический в $\overline{\Gamma}$, оператор $\mathscr{A}$ — эллиптический в $\overline{S}$.

$$\mathscr{A} = \sum_{i,j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x') \frac{\partial}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(x') \frac{\partial}{\partial x_j} + c(x').$$

Здесь $a_{ij}(x') = a_{ji}(x')$ — вещественнозначные функции, b_j, c, g, f — комплекснозначные функции; все функции предполагаются C^∞-гладкими (на самом деле, достаточно конечной гладкости этих функций, но недостаток места не позволяет нам уточнять условия гладкости). Тогда имеет место

Теорема 4. *Если спектр оператора A в $L_2(S)$, порожденного $\mathscr{A}$ и краевым условием* (16), *лежит в полуплоскости* $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \omega_0 > 0$, *то справедлива формула* (4), *где $v(x)$ — решение задачи*

$$\partial v / \partial x_n = \mathscr{A}(x', \partial / \partial x')v, \quad x' \in S,$$

с условиями (16) *и* (17) (*при* $x' \in \partial S$).

Действительно, оценка (5) для резольвенты в этом случае следует из [4]. Аналогично доказывается

Теорема 5. *Если спектр оператора A лежит в полуплоскости* $\operatorname{Im}\lambda \leqslant \leqslant -\omega_0 < 0$, *то справедлива формула* (10), *где $w(x)$ — решение задачи*

$$-i\, \partial w / \partial x_n = \mathscr{A}(x', \partial / \partial x')w, \quad x' \in S,$$

с условиями (16) *и* (17).

3°. Аналогичные результаты имеют место в случае, когда

1) $\mathscr{A}$ — эллиптический оператор порядка $2m \geqslant 2$;

2) на Γ' поставлены условия Лопатинского—Шапиро $B_j(x', \partial/\partial x')u|_{\Gamma'} = 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$, $\operatorname{ord} B_j < 2m$;

3) задача $\mathscr{A}^0 u = 0$, $x \in \Gamma$, $B_j^0 u|_{\Gamma'} = 0$ самосопряженная, где $\mathscr{A}^0$, B^0 — главные части $\mathscr{A}$, B_j;

4) спектр оператора A лежит в нужной полуплоскости.

Акустический институт
Москва

Поступило
17 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, 1, М., 1969. [2] С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, М., 1967. [3] Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, М., 1957. [4] S. Agmon, Comm. pure appl. math., 15, 2, 119 (1962).