

УДК 518.9+330.115 КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

М. Е. ПРИМАК

ОБ ОДНОЙ ОБЩЕЙ РАВНОВЕСНО-ОПТИМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ
И НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ ЭКОНОМИКИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 25 III 1971)

Статья посвящена формулировке одной общей равновесно-оптимальной задачи и установлению эквивалентности специальных равновесно-оптимальных задач некоторым моделям экономики. В п. 1 устанавливается существование равновесно-оптимального вектора, в п. 2 рассматривается модель производства, обобщающая известную модель А. Вальда, в п. 3 исследуется нелинейная модель обмена Д. Гейла и, наконец, в п. 4 устанавливается эквивалентность модели Эрроу — Дебре некоторой равновесно-оптимальной задаче, что приводит к новому доказательству существования равновесия в этой модели.

1. Пусть задано выпуклое замкнутое множество $\Omega \subset E^N$, а также вогнутые по $X \in E^N$ при фиксированном $x \in \Omega$ и непрерывные на $\Omega \times \Omega$ по переменным x и X функции $\Phi_0(x; X)$, $\Phi_1(x; X)$, ..., $\Phi_n(x; X)$.

Обозначим

$$\Omega(x) = \{X \in \Omega : \Phi_i(x; X) \geq 0, i = 1, \dots, n\}.$$

Поставим задачу отыскания вектора x^* такого, что

$$x^* \in \Omega(x^*); \max \{\Phi_0(x^*; X) : X \in \Omega(x^*)\} = \Phi_0(x^*; x^*). \quad (1)$$

Вектор x^* будем называть равновесно-оптимальным, а сформулированную задачу — равновесно-оптимальной.

В приводимой теореме устанавливается существование равновесно-оптимального вектора x^* .

Теорема 1. Если выполнены условия:

а) Ω ограничено;

б) для каждого $x \in \Omega$ существует вектор $X(x) \in \Omega$ такой, что $\Phi_i(x; X(x)) > 0, i = 1, \dots, n$,
то равновесно-оптимальный вектор x^* существует.

Доказательство. Рассмотрим точечно-множественное отображение

$$\varphi(x) = \{X \in \Omega(x) : \max_{z \in \Omega(x)} \Phi_0(x; z) = \Phi_0(x; X)\}.$$

Подмножество $\varphi(x)$ множества Ω непусто, выпукло и замкнуто. Докажем, что отображение $\varphi(x)$ полунепрерывно сверху. Пусть $x^k \rightarrow \bar{x}$; $X^k \rightarrow \bar{X}$; $X^k \in \varphi(x^k)$. Требуется доказать, что $\bar{X} \in \varphi(\bar{x})$. Предположим противное, т. е.

$$\max \{\Phi_0(\bar{x}; X) : X \in \Omega(\bar{x})\} > \Phi_0(\bar{x}; \bar{X}).$$

Это означает, что существует вектор $X_0 \in \Omega(\bar{x})$ такой, что

$$\begin{aligned} \max \{\Phi_0(\bar{x}; X) : X \in \Omega(\bar{x})\} &\geq \Phi_0(\bar{x}; X_0) > \Phi_0(\bar{x}; \bar{X}); \\ \Phi_i(\bar{x}; X_0) &> 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Поэтому для достаточно больших k

$\Phi_0(x^k; X_0) > \Phi_0(x^k; X^k)$; $X_0 \in \Omega(x^k)$,
что противоречит предположению, что $X^k \subset \varphi(x^k)$.

Полученное противоречие доказывает полунепрерывность сверху отображения $\Phi(x)$. По теореме Какутани существует вектор $x^* \in \Phi(x^*)$.

Теорема доказана.

Обозначим

$$\Phi(x; X) = \min \{ \Phi_0(x; X) - \Phi_0(x; x), \Phi_1(x; X), \dots, \Phi_n(x; X) \}.$$

Поставим задачу отыскания вектора $\tilde{x} \in \Omega$, для которого

$$\max \{ \Phi(\tilde{x}; X) : X \in \Omega \} = \Phi(\tilde{x}; \tilde{x}). \quad (2)$$

Нетрудно доказать, что при выполнении условий теоремы 1 задача (1) и задача (2) эквивалентны.

Имеет место следующая теорема, уточняющая теорему 1.

Теорема 2. Если для решения $\tilde{x}$ задачи (2) найдется вектор $X_0 \in \Omega(\tilde{x})$, для которого $\Phi_i(\tilde{x}; X_0) > 0$, $i = 1, \dots, n$, то $\tilde{x}$ — равновесно-оптимальный вектор задачи (1).

Доказательство. По самому построению функции $\Phi(x; X)$ имеем $\Phi(\tilde{x}; \tilde{x}) \leq 0$. Однако в силу сделанного предположения невозможно неравенство $\Phi(\tilde{x}; \tilde{x}) < 0$, так что $\Phi(\tilde{x}; \tilde{x}) = 0$; т. е. $\tilde{x} \in \Omega(\tilde{x})$. Докажем, что $\tilde{x}$ максимизирует $\Phi_0(\tilde{x}; X)$ на $\Omega(\tilde{x})$. Предположим противное, т. е. что существует вектор $\bar{X} \in \Omega(\tilde{x})$, для которого $\Phi_0(\tilde{x}; \bar{X}) > \Phi_0(\tilde{x}; \tilde{x})$. Для достаточно малых $\lambda > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \Phi_i(\tilde{x}; \bar{X} + \lambda(X_0 - \bar{X})) &> 0, \quad i = 1, \dots, n; \\ \Phi_0(\tilde{x}; \bar{X} + \lambda(X_0 - \bar{X})) &> \Phi_0(\tilde{x}; \tilde{x}), \end{aligned}$$

т. е. $\tilde{x}$ не является решением задачи (2). В силу полученного противоречия $\tilde{x}$ — равновесно-оптимальный вектор задачи (1).

2. Перейдем к рассмотрению одной специальной модели производства. Пусть в экономической системе производится m продуктов и используется r видов ресурсов, имеющих в количествах $a_1 > 0, \dots, a_r > 0$. Величины a_{ij} ($i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, m$), указывающие затраты i -го ресурса, необходимые для производства единицы j -го продукта, образуют матрицу затрат A . Пусть функция $f_j(x; v) \equiv f_j(x_1, \dots, x_m; v_1, \dots, v_r)$ определяет цену единицы j -го продукта при условии, что продукты произведены в количествах $x_1, \dots, x_m$, а цены ресурсов равны $v_1, \dots, v_r$.

Как и в модели А. Вальда ^(1, 2), поставим вопрос о существовании решения системы

$$\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \leq a_i, \quad i = 1, \dots, r; \quad \sum_{i=1}^r a_{ij}v_i \geq f_j(x; v), \quad j = 1, \dots, m; \quad (3)$$

$$\left(a_i - \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \right) v_i = 0, \quad i = 1, \dots, r; \quad \left(\sum_{i=1}^r a_{ij}v_i - f_j(x; v) \right) x_j = 0, \quad j = 1, \dots, m; \\ x \geq 0, \quad v \geq 0.$$

Рассмотрим равновесно-оптимальную задачу, в которой

$$\begin{aligned} \Phi_0 &\equiv \Phi_0(x, v; X, V) = \sum_{j=1}^m f_j(x; v) X_j - \sum_{i=1}^r a_i V_i; \\ \Phi_j &\equiv \Phi_j(x, v; X, V) = \sum_{i=1}^r a_{ij}V_i - f_j(x; v), \quad j = 1, \dots, m; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\Omega = \{ (x; v) : x \geq 0; v \geq 0; \sum_{j=1}^m a_{ij}x_j \leq a_i, \quad i = 1, \dots, r_m \}.$$

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Теорема 3. Если выполнены условия:

а) в каждом столбце матрицы $A = (a_{ij})$ имеется по крайней мере один ненулевой элемент;

б) функции $f_j(x; v)$, $j = 1, \dots, m$, непрерывны и ограничены на Ω , то в задаче (4) существует равновесно-оптимальный вектор $(x^*; v^*)$. Этот вектор является решением системы (3).

3. Рассматривается рынок товаров из m продуктов. Пусть $u_i(x_i) \equiv u_i(\xi_{i1}, \dots, \xi_{im}), \dots, u_n(x_n) \equiv u_n(\xi_{n1}, \dots, \xi_{nm})$ — вогнутые функции полезности потребителей, $b > 0$ — m -мерный вектор наличия всех продуктов, $p \geq 0$ — искомый вектор цен продуктов, $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) > 0$ — n -мерный вектор бюджетных ограничений потребителей.

Обозначим через $x_i(p)$ решение задачи

$$\max \{u_i(x_i) : (p, x_i) \leq \gamma_i; x_i \geq 0\}.$$

Задача заключается в установлении существования положительного вектора цен, являющегося решением системы уравнений

$$\sum_{i=1}^n x_i(p) = b, \quad (5)$$

или, другими словами, в установлении существования положительных цен продуктов p^* , при которых в условиях оптимизации индивидуальных функций полезности сохраняется равенство спроса и предложения. Рассматриваемая модель в случае линейных $u_i(x_i)$ сведена в (2) к задаче выпуклого программирования. Ниже нелинейная модель обмена приводится к некоторой равновесно-оптимальной задаче типа (1).

Обозначим

$$\begin{aligned} \bar{\Phi}_0(x; X) &= \sum_{i=1}^n \gamma_i \ln(\nabla u_i(x_i), X_i); \\ \bar{\Omega} &= \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = b; x_i \geq 0\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Поставим задачу отыскания вектора $\bar{x} \in \bar{\Omega}$, для которого

$$\max \{\bar{\Phi}_0(\bar{x}; X) : X \in \bar{\Omega}\} = \bar{\Phi}_0(\bar{x}; \bar{x}). \quad (7)$$

Теорема 4. Если каждая вектор-функция $\nabla u_i(x_i)$ полуположительна и непрерывна для всех $0 \leq x_i \leq b$, то в задаче (6), (7) существует равновесно-оптимальный вектор $\bar{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$.

Следствие. Если все вектор-функции $\nabla u_i(x_i)$ непрерывны при $0 \leq x_i \leq b$ и неотрицательная матрица

$$U(x) = (\nabla u_1(x_1), \nabla u_2(x_2), \dots, \nabla u_n(x_n))$$

не содержит нулевых строк и столбцов при $x \in \bar{\Omega}$, то система (5) имеет положительное решение p^* , где

$$p_\mu^* = \max_i \gamma_i \frac{\partial u_i(\bar{x}_i)}{\partial \xi_{i\mu}} / (\nabla u_i(\bar{x}_i), \bar{x}_i), \quad \mu = 1, \dots, m.$$

4. Перейдем к рассмотрению модели производства — обмена, предложенной в (4). Пусть в экономической системе производится m продуктов, а в процессе производства и обмена участвуют l производителей и n потребителей. Производственные возможности j -го производителя задаются с помощью технологического множества Q_j , m -мерных векторов продуктов y_j . Поведение i -го потребителя определяется множеством Ω_i , m -мерных

векторов продуктов x_i и функцией полезности $u_i(x_i)$. Как и выше, p означает неотрицательный вектор цен продуктов. Можно считать, что $\sum_i \alpha_{ij} = 1$.

Пусть в процессе перераспределения доходов i -й потребитель получает долю $a_{ij} \geq 0$ дохода j -го производителя. Предполагается, что $\sum_j p_j = 1$.

Векторы $x_1^*, \dots, x_n^*$; $y_1^*, \dots, y_l^*$; p^* образуют состояние равновесия, если

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sum_{i=1}^n x_i^* \leq \sum_{j=1}^l y_j^*; \\ 2) \quad & \max \{(p^*, y_j) : y_j \in Q_j\} = (p^*, y_j^*), \quad j = 1, \dots, l; \\ 3) \quad & \max \{u_i(x_i) : x_i \in \Omega_i; (p^*, x_i) \leq \sum_{j=1}^l \alpha_{ij}(p^*, y_j^*)\} = u_i(x_i^*), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Пусть выполнены условия:

а) множества Ω_i , $i = 1, \dots, n$; Q_j , $j = 1, \dots, l$, выпуклы, замкнуты и ограничены;

б) вогнутые функции $u_i(x_i)$ непрерывны на Ω_i .

Тогда задача типа (1) с

$$\begin{aligned} \Phi_0(x, y, p; X, Y, P) = & \sum_{i=1}^n \min \left\{ u_i(X_i) - u_i(x_i); \sum_{j=1}^l \alpha_{ij}(p, y_j) - (p, X_i) \right\} + \\ & + \sum_{j=1}^l (p, Y_j) + \left(P, \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^l y_j \right), \quad n = 0, \end{aligned}$$

$$\tilde{\Omega} = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \dots \times \Omega_n \times Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_l \times \left\{ p : p_\mu \geq 0; \sum_{\mu=1}^m p_\mu = 1 \right\}$$

обладает решением x^*, y^*, p^* .

Если для некоторого решения x^*, y^*, p^*

$$\min_i \max_{X_i \in \Omega_i} \left[\sum_{j=1}^l \alpha_{ij}(p^*, y_j^*) - (p^*, X_i) \right] > 0,$$

то векторы $x_1^*, \dots, x_n^*$; $y_1^*, \dots, y_l^*$; p^* образуют равновесие (8).

Украинский филиал научно-исследовательского
института планирования и нормативов
Киев

Поступило
26 II, 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. У. Кун, Сборн. Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, 1959.
² С. И. Зуховицкий, Р. А. Поляк, М. Е. Примаков, ДАН, 191, № 6 (1970).
³ Д. Гейл, Теория линейных экономических моделей, ИЛ, 1963. ⁴ К. J. Arrow, G. Debreu, Econometrica, 22 (1954).