

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

Г. Н. ЯКОВЛЕВ

О РЕШЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 13 VII 1971)

В работе изучаются обобщенные решения $u = u(x)$ первой краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений вида

$$-\sum_{i=1}^n D_i F^i(u_x) = h(x), \quad x \in g, \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $u_x = (u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$, $D_j F^i(u_x)$ — производная по x_j от $F^i(u_x)$ как функции от x , а g — ограниченная область n -мерного евклидова пространства E^n . Для простоты будем предполагать, что граница ∂g области g является достаточно гладким $(n-1)$ -мерным многообразием.

Предполагается, что функции $F^i(y)$, $i = 1, \dots, n$, входящие в уравнение (1), определены и непрерывны для всех $y = (y_1, \dots, y_n) \in E^n$, имеют в E^n частные производные первого порядка $F_{y_j}^i(y)$, $j = 1, \dots, n$, и удовлетворяют следующим условиям; существуют такие числа $p \geq 2$, $\mu > 0$, $\nu > 0$ и $\mu_i \geq 0$, что для любых $y \in E^n$ выполняются неравенства

$$\left(\sum_{i=1}^n |F^i(y)|^2 \right)^{1/2} \leq \mu (1 + |y|)^{p-1}, \quad (2)$$

$$\left(\sum_{i,j=1}^n |F_{y_j}^i(y)|^2 \right)^{1/2} \leq \mu (1 + |y|)^{p-2}, \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n F^i(y) y_i \geq \nu (1 + |y|)^p - \mu_1, \quad (4)$$

где $|y|$ — длина вектора y : $|y|^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$.

Кроме того предполагается, что уравнение (1) симметричное, т. е. для любых y , i и j имеет место равенство

$$F_{y_j}^i(y) = F_{y_i}^j(y), \quad (5)$$

и что выполняется следующее условие эллиптичности: существуют такие неотрицательные непрерывные функции $m_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, что для любых $y \in E^n$ и $\xi \in E^n$ выполняется неравенство

$$\sum_{i,j=1}^n F_{y_j}^j(y) \xi_i \xi_j \geq \sum_{i=1}^n m_i^2(y_i) \xi_i^2. \quad (6)$$

Функции $m_i(t)$ могут обращаться в нуль в некоторых точках, но так, чтобы функции

$$M_i(t) = \int_0^t m_i(t) dt, \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

были строго монотонно возрастающими. В силу этого условия функции $m_i(t)$ не могут обращаться в нуль во всех точках некоторого интервала.

Как обычно, через $W_p^1(g)$ обозначается функциональное пространство С. Л. Соболева ⁽¹⁾ с нормой

$$\|v\|_{1,p} = \|v\|_p + \sum_{i=1}^n \|v_{x_i}\|_p,$$

где $\|\cdot\|_p$ — норма в $L_p(g)$. Хорошо известно, что каждая функция из $W_p^1(g)$ принимает на ∂g вполне определенные значения (след на ∂g). Через $W_p^{1-1/p}(\partial g)$ будем обозначать пространство следов функций из $W_p^1(g)$ с соответствующей нормой (определения и теоремы см. в ⁽²⁾ и ⁽³⁾), а через $\dot{W}_p^1(g)$ — подпространство пространства $W_p^1(g)$, состоящее из функций, следы которых на ∂g равны нулю.

Функция $u(x) \in W_p^1(g)$ называется обобщенным решением первой краевой задачи для уравнения (1) в области g с краевым условием

$$u = f \quad \text{на } \partial g, \quad (8)$$

если след функции $u(x)$ на ∂g равен заданной функции f и если для любой функции $v(x)$ из $\dot{W}_p^1(g)$ справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^n \int_g F^i(u_x) v_{x_i} dx = \int_g h v dx. \quad (9)$$

Очевидно, что функция f , определенная на ∂g , должна принадлежать $W_p^{1-1/p}(\partial g)$.

Через $W_{r,\alpha}^1(g)$ $r > 1$, обозначим пространство функций $\varphi(x)$, $x \in g$, которые имеют первые обобщенные производные в смысле С. Л. Соболева ⁽¹⁾ и для которых конечна норма

$$\|\varphi\|_{1,r,\alpha} = \|\rho^{\alpha-1}\varphi\|_r + \sum_{i=1}^n \|\rho^\alpha \varphi_{x_i}\|,$$

где $\rho = \rho(x)$ — расстояние от точки x до ∂g .

Основная теорема. Пусть функции $F^i(y)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям (2) — (6), а функции $h(x)$, $x \in g$, и $f(x')$, $x' \in \partial g$, такие, что

$$h(x) \in M_{q,2}^1(g), \quad f(x') \in M_p^{1-1/p}(\partial g), \quad 1/p + 1/q = 1,$$

где p взято из условий (2) — (4).

Тогда обобщенное решение $u(x) \in W_p^1(g)$ первой краевой задачи (1), (8) существует, единственно и обладает следующими свойствами: функции $F^i(u_x(x))$ и $M_i(u_{x_i}(x))$, $i = 1, \dots, n$, как функции от x , принадлежит соответственно пространствам $W_{q,1}^1(g)$ и $W_{2,1}^1(g)$.

Простые примеры показывают, что решения уравнений вида (1) могут не иметь суммируемых вторых производных, если даже функции $h(x)$, $x \in g$, и $f(x')$, $x' \in \partial g$, бесконечно дифференцируемы; причем эта суммируемость нарушается не на границе области g , а внутри, и, следовательно, согласно определению ⁽¹⁾, эти решения не имеют вторых обобщенных про-

изводных в смысле С. Л. Соболева. Для примера рассмотрим уравнение вида (1), у которого $F^i(y) = y_i^3 \exp(-y_i^{-2})$ при $y_i \neq 0$ и $F^i(0) = 0$. Очевидно, для этого уравнения условия (2)–(6) выполняются с $p = 4$ и $m_i(t) = \exp(-t^{-2})$ и функция

$$u(x) = \int_0^{|x|^2-1} t \left(2 + \cos \frac{1}{t}\right) dt + C,$$

где C — произвольная постоянная, является решением этого уравнения например, в шаре $g = \{x: |x| < \sqrt{2}\}$ с бесконечно дифференцируемой функцией $h(x)$. Однако ее вторые производные не будут суммируемыми в g , точнее, они не будут суммируемыми в любой окрестности поверхности $|x| = 1$.

Таким образом, основная теорема и этот пример показывают, что если $u(x) \in W_p^1(g)$ есть обобщенное решение задачи (1), (8), то оно может не иметь в g обобщенных производных второго порядка в смысле С. Л. Соболева, однако функции $F^i(u_x(x))$, $i = 1, \dots, n$, как функции от x , имеют обобщенные производные из L_q в любой строго внутренней подобласти области g , и, следовательно, функция $u(x)$ почти всюду в g удовлетворяет уравнению (1). Доказательство этого факта и является основной целью настоящей работы.

Вопросы существования и единственности обобщенных решений из $W_p^1(g)$ для краевых задач типа (1), (8) изучались во многих работах (библиографию см., например, в ⁽⁴⁾). В данной работе существование решения задачи (1), (8) с нужными свойствами доказывается методом Галёркина со специальным выбором базисных функций. Наша работа по методу близка к работе ⁽⁵⁾, в которой рассматривалась, в частности, аналогичная задача в случае, когда функция $m^2(t) = \min_i \{m_i^2(t), i = 1, \dots, n\}$

такая, что $m^2(t) = c|t|^{p-2}$ для $|t| \geq R$ и $m^2(t) \geq c_0|t|^s$ для $|t| < R$, где $c > 0$, $c_0 > 0$, $R \geq 0$ и $s \geq 0$ — некоторые постоянные. В ⁽⁵⁾ доказывается существование и единственность обобщенного решения $u(x)$ из $W_p^1(g)$, а также показывается, что $M(u_{x_i}) \in W_{2,1}^1(g)$, $i = 1, \dots, n$, где $M(t)$ образуется из $m(t)$ по формуле (7). Вопрос о дифференцируемости функций $F^i(u_x)$, $i = 1, \dots, n$, в работе ⁽⁵⁾ не рассматривался. Этот вопрос для обобщенных решений уравнений вида (1) изучался в работах А. Д. Джабраилова ⁽⁶⁾ и автора ^(7, 8). В этих работах исследование ведется другим методом и при более жестких ограничениях на функции $F^i(y)$. Примерно эти ограничения следующие: в неравенствах (2) и (3) вместо суммы $1 + |y|$ стоит просто $|y|$, а в (6) вместо функций $m_i^2(y_i)$ стоит $|y|^{p-2}$; неравенство (4) тогда выполняется автоматически.

При доказательстве основной теоремы используются соответствующие априорные оценки решений уравнения (1). Приведем одну из них.

Пусть $\rho = \rho(x)$ — расстояние от точки $x \in g$ до ∂g и пусть число κ такое, что

$$\sum_{i=1}^n |\rho_{x_i}|^2 \geq \kappa, \quad \sum_{i,j=1}^n ((\rho^2)_{x_i x_j})^2 \leq \kappa^2.$$

Через $C_0^3(g)$ обозначим множество функций, трижды непрерывно дифференцируемых в замкнутой области $\bar{g} = g \cup \partial g$ и обращающихся в нуль на ∂g , а через $W_{p,1}^2(g)$ — пространство функций $\Phi(x)$, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|\Phi\|_{2,p,1} = \|\Phi\|_{1,p} + \sum_{i,j=1}^n \|\rho \Phi_{x_i x_j}\|_p.$$

Теорема. Пусть функции $F^i(y)$, $i = 1, \dots, n$, удовлетворяют условиям (2) — (6), а функции $h(x)$ и $\Phi(x)$ такие, что

$$\Phi(x) \in W_{p,1}^2(g), \quad h(x) \in W_{q,2}^1(g), \quad 1/p + 1/q = 1,$$

где p взято из условий (2) — (4).

Тогда для любой функции, представимой в виде суммы $u(x) = \Phi(x) + v(x)$, где $v(x) \in C_0^3(g)$, и удовлетворяющей условию

$$\int_g \left(\sum_{i=1}^n D_i F^i(u_x) + h \right) \left(p^2 \sum_{j=1}^n v_{x_j x_j} - \lambda v \right) dx = 0$$

при некотором $\lambda \geq \gamma (1 + 44\mu + 3\mu)$, выполняется неравенство

$$\|u\|_{1,p}^p + \sum_{i=1}^n \{ \|M_i(u_{x_i})\|_{1,2,1}^2 + \|F^i(u_x)\|_{1,q,1}^q \} \leq C_0 \{ 1 + \|\Phi\|_{2,p,1}^p + \|h\|_{1,q,2}^q \},$$

где $M_i(t)$ определены формулами (7), а постоянная C_0 зависит лишь от n , p , μ , γ , μ_1 , области g и не зависит от выбора функций Φ , h , v .

Заметим, что аналогичные результаты получаются для более общих эллиптических уравнений вида

$$-\sum_{i=1}^n D_i F^i(x, u, u_x) = h(x)$$

и для систем таких уравнений при соответствующих условиях на функции F^i подобных тем, которые приведены в работе (5).

Московский физико-технический институт
г. Долгопрудный Моск. обл.

Поступило
2 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. ² С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. ³ E. Gagliardo, Rend. Semin. mat. univ. Padova, 27, 284 (1957). ⁴ О. А. Ладыженская, Н. Н. Уралцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, «Наука», 1964. ⁵ М. И. Вишик, Тр. Московск. матем. общ., 12, 125 (1963). ⁶ А. Д. Джабраилов, Дифференциальные уравнения, 5, № 12, 2245 (1969). ⁷ Г. Н. Яковлев, Там же, 5, № 7, 2103 (1969). ⁸ Г. Н. Яковлев, Там же, 6, № 1, 157 (1970).