Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 1

УДК 533.697.4 *ГИДРОМЕХАНИКА*

У. Г. ПИРУМОВ

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ДО- И СВЕРХЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ В СОПЛАХ И КАНАЛАХ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 21 VII 1971)

Представлены результаты исследования пространственных до- и сверхзвуковых течений газа в соплах и каналах переменного сечения. Дана постановка обратной задачи теории сопла Лаваля, обобщенная на случай пространственных течений. В окрестности поверхности, на которой задаются данные Коши, построено асимптотическое разложение в ряд по функции тока и указан метод решения соответствующих уравнений. Из выполненных к настоящему времени работ отметим работы [1-3], в которых трехмерным методом характеристик рассчитаны пространственные и сверхзвуковые течения в соплах, и работу [4], в которой построены аналитические решения в окрестности центра сопла.

1. Основные уравнения и постановка задачи. Введем криволинейную систему координат, связанную с кривой $y = f_0(s)$, расположенной в плоскости xy. Координаты точки N в этой системе определяются длиной дуги s, расстоянием по нормали к этой кривой r и углом φ в нормальной плоскости (рис. 1).

Уравнения газовой динамики, записанные в криволинейной системе координат s, r, φ [7], преобразуем к новым независимым переменным. Новые независимые переменные ψ и θ такие, что поверхности $\psi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ являются поверхностями тока, которые могут быть введены для стационарных пространственных течений [8]. Выкладки по выводу исходной системы уравнений проведем по аналогии с [9, 5]. В результате получим следующую систему из пяти дифференциальных уравнений в частных производных и двух конечных соотношений для определения семи зависимых переменных u, v, w, ρ, p, r и φ как функций независимых переменных s, ψ и θ:

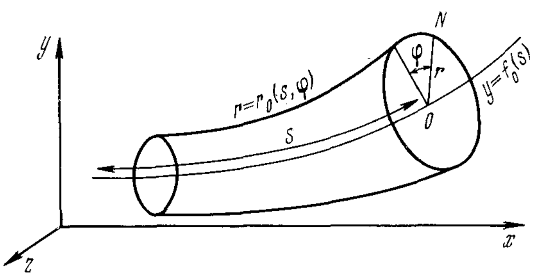

Рис. 1. Криволинейная система координат

$$\frac{\partial p}{\partial \psi} = -\gamma \frac{G(s, \theta, \psi)}{ur\,\partial\varphi/\partial\theta} + \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial p}{\partial \theta} \Big/ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \tag{1,1}$$

$$\frac{\partial r^2}{\partial \psi} = \frac{2}{\rho u\,\partial\varphi/\partial\theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial r^2}{\partial \theta} \Big/ \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}; \tag{1,2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{wv}{ru}\left(1 \mp \frac{r}{R}\cos\varphi\right) \pm \frac{u \sin\varphi}{R} + \frac{\left(1 \mp \frac{r}{R}\cos\varphi\right)}{ur\,\partial\varphi/\partial\theta}\left[\frac{1}{\gamma\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta} + G(s, \theta, \psi)\frac{\partial r}{\partial \theta}\right]; \tag{1,3}$$

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{v}{u}\left(1 \mp \frac{r}{R}\cos\varphi\right); \tag{1,4}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{w}{ru}\left(1 \mp \frac{r}{R}\cos\varphi\right); \tag{1,5}$$

$$u = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} - 2\frac{p^{(\gamma-1)/\gamma}}{\gamma-1} - v^2 - w^2\right)^{1/2}; \tag{1,6}$$

$$p = \rho^\gamma; \tag{1,7}$$

$$G(s, \theta, \psi) = \frac{u}{1 \mp \frac{r}{R}\cos\varphi}\,\frac{\partial v}{\partial s} \mp \frac{u^2\cos\varphi}{R\left(1 \mp \frac{r}{R}\cos\varphi\right)} - \frac{w^2}{r}.$$

Здесь γ — показатель адиабаты, u, v и w — проекции вектора скорости на оси криволинейной системы координат s, r и φ, отнесенные к a_* — критической скорости звука; p, ρ — давление и плотность, отнесенные к давлению p_* и плотности ρ_* в критическом сечении; параметры с размерностью длины отнесены к некоторой характерной длине r_*, а функция тока ψ — к $\rho_* a_* r_*^2$; $R(s)$ — радиус кривизны кривой $f_0(s)$. При $w \equiv 0$, $R = \infty$ система (1,1) — (1,7) переходит в систему уравнений, использованную в ([6]) для осесимметричного случая. При этом очевидно, что поверхности тока $\theta = \text{const}$ есть просто меридиональные плоскости и $\theta = \varphi$. Существенным для дальнейшего является то, что уравнение (1,3) не содержит производных по ψ. Известно, что все поверхности, состоящие из линий тока, являются характеристическими ([10]). Однако в двумерном безвихревом течении линия тока является вырожденной характеристикой. Нетрудно при этом показать, что на поверхностях тока исходная система в декартовых координатах из пяти дифференциальных уравнений в частных производных переходит в систему из трех уравнений совместности, выполняющихся вдоль линий тока, и двух дополнительных уравнений. Уравнениями совместности являются два уравнения движения (в качестве одного из них может быть выбрано уравнение Бернулли) и уравнение сохранения энтропии. Дополнительными уравнениями являются одно из уравнений движения и уравнение неразрывности, содержащие производные по нормали к поверхности тока. В осесимметричном или плоском случаях для безвихревого течения наличие этих двух уравнений позволяет элементарно разрешить задачу Коши при условии, что на некоторой кривой, являющейся линией тока, задана какая-либо из компонент скорости ([6]).

Иная ситуация имеет место в пространственном безвихревом течении. Поскольку поверхность тока является характеристической поверхностью, то двух дополнительных уравнений и трех уравнений совместности недостаточно для определения параметров течения на следующем слое (следующей поверхности тока), так как на этом слое приходится решать систему уравнений в частных производных (1,3), (1,5), начальные условия для которой не заданы. Очевидно, что при задании начальных данных в какой-либо плоскости $s = s_0$ можно получить решение задачи Коши уже на поверхности $\psi = \text{const}$.

Таким образом, обратную задачу теории сопла для системы (1,1) — (1,7) для общего случая пространственного течения можно сформулировать следующим образом. Пусть на поверхности $r = r_0(s, \theta)$ (рис. 1) задано распределение компоненты скорости $u = u_0(s, \theta)$, а на плоскости $s = s_0$ задано распределение компоненты скорости $w = w_0(\theta, \psi)$ и координаты $\varphi = \varphi_0(\theta, \psi)$, требуется определить семейство поверхностей тока и параметры течения в окрестности начальной поверхности тока.

Важно отметить при этом, что задание на поверхности тока всех компонент скорости лишь переопределяет задачу. Для пространственного течения обратная задача расщепляется на две задачи Коши. Для уравнений (1,1), (1,2) задача Коши решается в направлении ψ, а для уравнений (1,3), (1,5) в направлении s.

2. Разложение в ряд по функции тока. Построим решение системы (1,1)—(1,7) в окрестности начальной поверхности $\psi = 0$ в виде рядов по функции тока. Представим искомые параметры u, v, w, p, ρ, φ и r в виде [6]

$$f(s, \psi, \theta) = \sum_{n=0}^{N} f_n(s, \theta)\psi^n + \sqrt{\psi} \sum_{n=0}^{N} f_n^0(s, \theta)\psi^n, \tag{2,1}$$

где $f(s, \psi, \theta)$ — любая из перечисленных выше функций. Если соотношения (2,1) подставить в систему (1,1)—(1,7) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ψ в левой и правой частях уравнений, то вместо исходной системы уравнений в частных производных с тремя независимыми переменными s, θ и ψ получим также систему уравнений в частных производных, но уже с двумя независимыми переменными s, θ для определения функций $f_n(s, \theta)$ и $f_n^0(s, \theta)$. Построим решение асимптотических уравнений в случае $r_0 \equiv 0, R(s) = \infty$. Имеем

$$v_0^0 = u_0(s)\,\partial r_0^0/\partial s, \qquad \partial\varphi_0/\partial s = w_0^0/(r_0^0 u_0(s)); \tag{2,2}$$

$$(r_0^0)^2 = 2/(\rho_0 u_0\,\partial\varphi_0/\partial\theta); \tag{2,3}$$

$$p_1 = -\frac{\gamma}{r_0^0 u_0(s)\,\partial\varphi_0/\partial\theta}\left[u_0\frac{\partial v_0^0}{\partial s} - \frac{(w_0^0)^2}{r_0^0}\right]; \tag{2,4}$$

$$\frac{\partial w_0^0}{\partial s} = -\frac{w_0^0 v_0^0}{u_0 r_0^0} - \frac{1}{\gamma}\left[p_1\frac{\partial r_0^0}{\partial\theta} - \frac{1}{2}r_0^0\frac{\partial p_1}{\partial\theta}\right]. \tag{2,5}$$

Предположив малое отличие параметров течения от параметров осесимметричного течения, можно методом малых возмущений построить аналитическое решение системы (2,2)—(2,5), предварительно линеаризовав ее. В результате получим, с точностью до членов порядка ε^2, следующее приближенное решение системы (2,2)—(2,5):

$$p_1 = p_{10}\left\{1 - \varepsilon r_{00}^0(s_0)\sum_{k=0}^{k} k\left[\frac{w_{01k}^0(s_0)}{2}\int_{s_0}^{s}\rho_0 ds + \frac{\varphi_{01k}(s_0)}{r_{00}^0(s_0)}\right]\cos k\theta\right\},$$

$$r_0^0(s, \theta) = r_{00}^0(s)\left\{1 - \varepsilon r_{00}^0(s_0)\sum_{k=0}^{k}\frac{k}{2}\left[\frac{w_{01k}^0(s_0)}{2}\int_{s_0}^{s}\rho_0 ds + \frac{\varphi_{01k}(s_0)}{r_{00}^0(s_0)}\right]\cos k\theta\right\}, \tag{2,6}$$

$$\varphi_0 = \theta + \varepsilon\sum_{k=0}^{k}\left[\frac{r_{00}^0(s_0)\,w_{01k}^0(s_0)}{2}\int_{s_0}^{s}\rho_0 ds + \varphi_{01k}(s_0)\right]\sin k\theta,$$

$$w_0^0 = \varepsilon\frac{r_{00}^0(s_0)}{r_{00}^0(s)}\sum_{k=0}^{k} w_{01k}^0(s_0)\sin k\theta, \qquad r_{00}^0(s) = \left(\frac{2}{\rho_0 u_0}\right)^{1/2},$$

$$p_{10} = -\frac{1}{\gamma r_{00}^0(s)}\frac{d}{ds}\left(u_0\frac{dr_{00}^0}{ds}\right),$$

где $w_{01k}^0(s_0)$ и $\varphi_{01k}(s_0)$ — коэффициенты Фурье в разложениях начальных функций $w_0^0(s, \theta)$ и $\varphi_0(s_0, \theta)$ по $\sin k\theta$, а ε — параметр малости.

Из формул (2,6) следует, что если при $s = s_0$ положить $\varphi_{01k}(s_0) = 0$, то в этой плоскости поперечное сечение сопла имеет форму окружности, однако при увеличении s уже не будет обладать осевой симметрией, а приобретет форму, определяемую начальным значением $w_{01k}^0(s_0)$. Если $\varepsilon = 1/R$, то можно показать, при $r_0 = 0$ и $R \neq \infty$, что с точностью до величин порядка ε^2 в поперечных сечениях сопло сохраняет форму окружности, однако ось сопла при этом криволинейна в соответствии с законом изменения $R = R(s)$.

Разностная схема для численного решения обратной задачи при пространственном течении может быть построена по аналогии с осесимметричным случаем ([5], [6]). Результаты расчетов по формулам (2,6) представлены на рис. 2, на котором изображено сопло, осесимметричное до минимального сечения и имеющее при двух плоскостях симметрии некруглую близкую к эллиптической форму поперечного сечения вниз по потоку. Показана форма поперечного сечения сопла в различных сечениях $s = \text{const}$. В выходном сечении при $s = 2$ отношение полуосей равно 1,5. При расчете этого варианта было принято $s_0 = 0$, $k = 2$, $\varepsilon = 0{,}875$, $\gamma = 1{,}4$ и

$$u_0(s) = 1 + \frac{(1-u_\infty)(\bar{u}_\infty - 1)(e^{-s/b} - 1)}{(1-u_\infty)\,e^{-s/b} + (\bar{u}_\infty - 1)}, \qquad (2{,}7)$$

где $u_\infty = 0{,}1$; $\bar{u}_\infty = 1{,}9$; $1/b = 3{,}5$. На этом же рисунке представлено геометрическое место точек $\theta = \text{const}$, т. е. проекции на плоскость yz вторых поверхностей тока, и величина p_1/p_{10} в различных сечениях в зависимости от θ. Очевидно, наличие перетекания газа из плоскости $z = 0$ в плоскость $y = 0$. Пунктиром изображена геометрия сопла в осесимметричном случае при том же начальном распределение скорости.

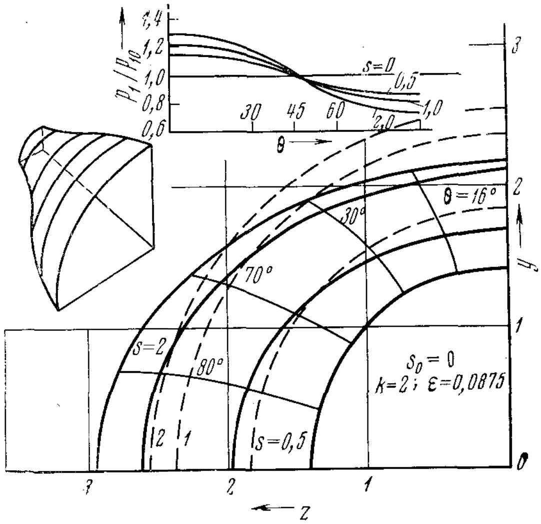

Рис. 2. Геометрия поперечных сечений и линий тока пространственного сопла с двумя плоскостями симметрии

Поступило
7 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Н. Кацкова, П. И. Чушкин, Журн. вычислит. техники и матем. физики, 8, № 5, 1049 (1968). [2] V. Ransom, H. Thompson, J. D. Hoffman, Am. Inst. Aeronaut. and Astronaut., Paper № 69—5, N. Y., 1969. [3] V. Ransom, H. Thompson, J. D. Hoffman, J. of Spacecraft and Rockets, 7, № 4, 458 (1970). [4] О. С. Рыжов, ПММ, 22, в. 4, 781 (1958). [5] У. Г. Пирумов, ДАН, 176, № 2, 287 (1967). [6] У. Г. Пирумов, Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, № 5, 10 (1967). [7] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. 1, М., 1955. [8] J. Giese, J. of Math. and Phys., 30, № 1, p. 31 (1951). [9] В. Б. Миносцев, Тр. Московск. физико-технич. инст., № 7, 136 (1961). [10] Р. Мизес, Математическая теория течений сжимаемой жидкости, ИЛ, 1961.