Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 3

УДК 533.98+537.312.62 *ЭЛЕКТРОТЕХНИКА*

Ю. А. ДРЕЙЗИН

РАЗРЯД ИНДУКТИВНОЙ КАТУШКИ НА БОЛЬШОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 29 IV 1971)

1. Картина разряда индуктивной катушки на внешнее сопротивление R зависит от соотношения между толщиной скинслоя δ и толщиной провода катушки r $(\delta = \sqrt{L/(2\pi\sigma R)}$, где L — индуктивность катушки, σ — проводимость провода). При $\delta \gg r$ зависимость полного тока от времени

$$I(t) = I(0)\exp\left\{-\frac{c^2 R}{L}t\right\},$$

а для потерь Q в катушке справедлива элементарная формула *

$$Q = \int_0^\infty I^2(t) R_k\, dt,$$

где R_k — сопротивление катушки. В настоящей работе будет рассмотрен противоположный предельный случай тонкого скинслоя $\delta \ll r$.

Задача о вычислении джоулевых потерь при разряде возникает в связи с известными предложениями по использованию индуктивных катушек в качестве накопителей магнитной энергии (см., например, ([1])). Особенно остро вопрос о потерях встает для индуктивных накопителей, работающих при низких температурах, где джоулевы потери определяют количество хладагента, потребляемого при разряде на нагрузку.

Всюду рассматривается квазистационарное приближение, условия применимости которого обычно хорошо выполняются.

2. Рассмотрим предельное поведение картины разряда при $R \to \infty$. Заметим, что чем больше R, тем за меньшее время τ должен затухать полный ток через катушку. С другой стороны, изменение магнитного поля внутри провода стремится к нулю вместе с τ (поскольку поле «вморожено» в металл). Следовательно, за время $\sim \tau$ не изменится и плотность тока внутри провода $\left(\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\mathbf{H}\right)$. Единственный способ удовлетворить обоим требованиям — быстрому спаданию полного тока и неизменности плотности тока внутри провода — заключается в том, что за время $\sim \tau$ появляется «поверхностный» ток (точнее, распределенный в скинслое $\delta \sim \sim \sqrt{c^2\tau/2\pi\sigma} \ll r$), текущий в направлении, противоположном первоначальному току, а по величине равный ему. При этом распределение поверхностной плотности тока такое, что магнитное поле, создаваемое этим током, равно нулю в проводниках.

Обозначим магнитное поле, создаваемое поверхностным противотоком, $-\mathbf{H}_s$. Тогда к концу «быстрого» процесса затухания полного тока в катушке останется поле

$$\mathbf{H}_{\text{ост}} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_s$$

($\mathbf{H}$ — поле постоянного тока I, существовавшего в катушке до разряда).

* В многослойных катушках эта формула справедлива лишь при $\delta / r \gg N$, где N — большой параметр, связанный с многослойностью. При $1 \ll \delta / r \ll N$ существенный вклад дают вихревые токи (см. ([2])).

Энергия поля $\mathbf{H}_{\text{ост}}$ диссипируется в самой катушке, поскольку оно создается током, полная величина которого равна нулю. Чтобы показать, что полные потери в катушке за время разряда равны энергии поля $\mathbf{H}_{\text{ост}}$, достаточно убедиться в том, что выделение тепла поверхностным током в слое $\sim\delta$ за время $\sim\tau$ мало вместе с τ. Действительно, плотность поверхностного тока $j_s\sim I/(r\delta)$; мощность джоулевых потерь (на единицу длины)

$$\int\frac{j_s^2}{\sigma}dS\sim\frac{j_s^2}{\sigma}r\delta\sim\frac{I^2}{\sigma r\delta}$$

(интеграл берется по сечению провода). Диссипация за время $\sim\tau$

$$\frac{I^2}{\sigma r\delta}\tau\sim\frac{I^2}{rc}\sqrt{\frac{\tau}{\sigma}}$$

и стремится к нулю вместе с τ. Таким образом, потери в катушке

$$Q=\int\frac{\mathbf{H}_{\text{ост}}^2}{8\pi}dV. \tag{1}$$

3. Преобразуем выражение (1) к более удобному виду. Возведем в квадрат равенство $\mathbf{H}=\mathbf{H}_{\text{ост}}+\mathbf{H}_s$ и проинтегрируем по пространству

$$\int\mathbf{H}^2dV=\int\mathbf{H}_{\text{ост}}^2dV+\int\mathbf{H}_s^2dV+2\int\mathbf{H}_{\text{ост}}\mathbf{H}_s\,dV. \tag{2}$$

Напомним, что $\mathbf{H}_s=0$ в проводниках. Но вне провода $\mathbf{H}_{\text{ост}}$ можно описать магнитным потенциалом ψ: $\mathbf{H}_{\text{ост}}=\nabla\psi$. Заметим, что потенциал ψ однозначен, поскольку полный ток, создающий $\mathbf{H}_{\text{ост}}$, равен нулю. Отсюда получаем

$$\int\mathbf{H}_s\mathbf{H}_{\text{ост}}\,dV=\int\mathbf{H}_s\nabla\psi\,dV=\oint\psi\mathbf{H}_s d\mathbf{S}-\int\psi\operatorname{div}\mathbf{H}_s\,dV, \tag{3}$$

где поверхностный интеграл берется по поверхности провода. Первый интеграл справа обращается в нуль, поскольку $\mathbf{H}_s$ касательно к поверхности провода катушки, а второй — поскольку $\operatorname{div}\mathbf{H}_s=0$. Теперь из (1), (2) получаем

$$Q=\int\frac{\mathbf{H}^2}{8\pi}dV-\int\frac{\mathbf{H}_s^2}{8\pi}dV, \tag{4}$$

что можно записать также в виде

$$Q=\frac{1}{2c^2}LI^2-\frac{1}{2c^2}L_sI^2, \tag{5}$$

где L — индуктивность катушки на постоянном токе, L_s — высокочастотная индуктивность.

Фактический расчет Q связан с нахождением $\mathbf{H}_s$ и является сложной задачей математической физики. Легко можно получить оценку снизу для Q. Именно, Q больше, чем энергия первоначального поля $\mathbf{H}$, заключенная в объеме провода. Это следует из того, что внутри провода $\mathbf{H}_{\text{ост}}=\mathbf{H}$.

В случае разреженной обмотки (с коэффициентом заполнения $k\ll 1$) и провода круглого сечения, легко найти энергию остаточного поля. При этом $\mathbf{H}_{\text{ост}}$ можно определять отдельно вблизи каждого участка провода. Ответы для этого случая состоят в следующем. Если поле вблизи данного участка провода в основном создается током, текущим по этому участку, то энергия остаточного поля равна энергии первоначального поля, заключенной в объеме провода. Если же поле тока, протекающего по рассматриваемому участку, мало по сравнению с полем, создаваемым другими частями катушки, то энергия остаточного поля вдвое больше энергии поля **H**, заключенной в объеме провода. Поскольку задача об определении $\mathbf{H}_s$ в реальной катушке весьма трудна, то, возможно, наиболее простой способ найти потери состоит просто в измерении индуктивностей L и L_s и использовании соотношения (5) (если L и L_s не слишком мало отличаются друг от друга). L нужно мерить на низких частотах, когда скинслой $\delta \gg r$, а L_s — на высоких, когда $\delta \ll r$.

Заметим, что формулы (4), (5) справедливы и в том случае, когда σ меняется (из-за нагрева), а также для катушек, намотанных из сверхпроводящей проволоки, покрытой нормальным металлом, поскольку в этом случае противоток будет течь по поверхности нормального металла, а от наличия сверхпроводника будет зависеть лишь временной ход диссипации энергии остаточного поля.

В заключение автор выражает благодарность А. А. Веденову и А. М. Дыхне за интерес к работе и полезные обсуждения.

Поступило
31 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Андрианов, В. Б. Зенкевич и др., ДАН, 196, № 2 (1971). [2] Ю. Ю. Абрамов, А. А. Веденов, Ю. А. Дрейзин, ДАН, 201, № 2 (1971).