

М. А. АКВИС, В. В. ГОЛЬДБЕРГ

О МНОГОМЕРНЫХ ТРИ-ТКАНЯХ, ОБРАЗОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТЯМИ РАЗНЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 IX 1971)

1. Пусть X_n — дифференцируемое многообразие со структурой декартовой композиции ⁽¹⁾. Это значит, что X_n расслаивается на q - и p -параметрические семейства S_1 и S_2 поверхностей V_p и V_q ($n = p + q$, $p \leq q$). Семейства S_2 и S_1 зададим соответственно вполне интегрируемыми системами линейно независимых форм Пфаффа ω^a ($a = 1, \dots, p$) и ω^u ($u = p + 1, \dots, n$). Условия полной интегрируемости этих систем форм записываются в виде

$$d\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a, \quad d\omega^u = \omega^v \wedge \omega_v^u. \quad (1)$$

Уравнения (1) — уравнения структуры X_n . Для точки $x \in X_n$ имеем $dx = \omega^a e_a + \omega^u e_u$, где e_a и e_u — векторы касательного пространства $T_n(x)$, касающиеся соответственно поверхностей V_p и V_q , проходящих через x .

На многообразии X_n зададим еще одно семейство S_3 поверхностей V_r , так, что через каждую точку $x \in X_n$ проходит одна и только одна поверхность этого семейства и поверхности семейства S_3 находятся в общем положении с поверхностями семейств S_1 и S_2 . Совокупность семейств S_1, S_2, S_3 поверхностей размерностей p, q, r на X_n назовем (p, q, r) -тканью. Такая ткань представляет дифференцируемую G -структуру на X_n , структурная группа которой является подгруппой группы $GL(n, R)$.

(p, q, r) -ткани представляют обобщение три-тканей многомерных поверхностей, для которых $p = q = r$. Такие ткани изучались в работах ⁽²⁻⁴⁾. $(1, 2, 1)$ -ткани рассматривались в ⁽⁵⁻⁷⁾. В настоящей работе изучаются (p, q, r) -ткани общего вида.

Семейство S_3 зададим вполне интегрируемой системой форм Пфаффа

$$\theta^\xi = \lambda_{\alpha}^{\xi} \omega^{\alpha} + \lambda_u^{\xi} \omega^u, \quad \xi = r + 1, \dots, n. \quad (2)$$

Условия полной интегрируемости этой системы форм имеют вид

$$d\theta^\xi = \theta^\eta \wedge \theta_\eta^\xi. \quad (3)$$

Рассмотрение системы (2) приводит к трем случаям: 1) $r \leq p \leq q$, 2) $p \leq r \leq q$, 3) $p \leq q \leq r$.

2. В первом случае ($r \leq p \leq q$) система форм (2) может быть приведена к виду

$$\theta^{p+\alpha} = \omega^{p+\alpha} + \omega^\alpha, \quad \theta^{a_1} = \omega^{a_1}, \quad \theta^{u_1} = \omega^{u_1}, \quad (4)$$

где $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, r$, $a_1, b_1, c_1 = r + 1, \dots, p$; $u_1, v_1, w_1 = r + p + 1, \dots, n$; $a = \{\alpha, a_1\}$; $u = \{p + \alpha, u_1\}$. Теперь векторы $f_\alpha = e_\alpha - e_{p+\alpha}$ касаются поверхности V_r . В силу (4) и (3) система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^\beta \wedge \theta_\beta^a + \omega^{a_1} \wedge \omega_{a_1}^a + \mu_{\beta\gamma}^a \omega^\beta \wedge \omega^\gamma, \\ d\omega^{a_1} &= \omega^{b_1} \wedge \omega_{b_1}^{a_1} + \mu_{a_1 u_1}^{a_1} \omega^a \wedge \omega^{u_1} + \mu_{\alpha\beta}^{a_1} \omega^\alpha \wedge \theta^{p+\beta}, \\ d\omega^{p+\alpha} &= \omega^{p+\beta} \wedge \theta_\beta^{\alpha} + \omega^{u_1} \wedge \omega_{u_1}^{p+\alpha} - \mu_{\beta\gamma}^{\alpha} \omega^{p+\beta} \wedge \omega^{p+\gamma}, \\ d\omega^{u_1} &= \omega^{v_1} \wedge \omega_{v_1}^{u_1} + \mu_{\alpha b_1}^{u_1} \omega^{p+\alpha} \wedge \omega^{b_1} + \mu_{\alpha\beta}^{u_1} \omega^{p+\alpha} \wedge \theta^{p+\beta}, \end{aligned} \quad (5)$$

где величины $\mu_{\beta\gamma}^\alpha$ кососимметричны по нижним индексам.

Продолжая уравнения (4) и фиксируя точку $x \in X_n$, получим

$$\begin{aligned} \nabla_{\delta} \mu_{\alpha\beta}^{a_1} &= 0, & \nabla_{\delta} \mu_{\alpha\beta}^{u_1} &= 0, & \nabla_{\delta} \mu_{\alpha u_1}^{a_1} &= \mu_{\alpha\beta}^{a_1} \pi_{u_1}^{p+\beta}, \\ \nabla_{\delta} \mu_{\alpha b_1}^{u_1} &= \mu_{\alpha\beta}^{u_1} \pi_{b_1}^{\beta}, & \nabla_{\delta} \mu_{\beta\gamma}^{\alpha} &= \mu_{[\beta\gamma]}^{\alpha} \pi_{u_1}^{\alpha} - \mu_{[\beta\gamma]}^{u_1} \pi_{u_1}^{p+\alpha}, \end{aligned} \quad (6)$$

где π_i^j , $i, j = 1, \dots, n$, — значения форм ω_i^j и θ_{α}^{β} , а ∇_{δ} — оператор ковариантного дифференцирования при фиксированной точке $x \in X_n$, например,

$$\nabla_{\delta} \mu_{\alpha u_1}^{a_1} = \delta \mu_{\alpha u_1}^{a_1} - \mu_{\beta u_1}^{a_1} \pi_{\alpha}^{\beta} - \mu_{\alpha r_1}^{a_1} \pi_{u_1}^{r_1} + \mu_{\alpha u_1}^{b_1} \pi_{b_1}^{a_1}.$$

Из (6) вытекает, что $\{\mu_{\alpha\beta}^{a_1}\}$, $\{\mu_{\alpha\beta}^{u_1}\}$, $\{\mu_{\alpha\beta}^{a_1}\}$, $\{\mu_{\alpha u_1}^{a_1}\}$, $\{\mu_{\alpha u_1}^{u_1}\}$, $\{\mu_{[\alpha\beta]}^{u_1}\}$, $\{\mu_{[\alpha\beta]}^{a_1}\}$, $\{\mu_{\alpha\beta}^{\gamma}\}$, $\{\mu_{\alpha\beta}^{a_1}\}$, $\{\mu_{\alpha\beta}^{u_1}\}$, $\{\mu_{\alpha u_1}^{a_1}\}$, $\{\mu_{\alpha u_1}^{u_1}\}$, $\{\mu_{\alpha\beta}^{\gamma}\}$ являются тензорами. Последний из них есть первый структурный тензор G -структуры, определяемой (p, q, r) -тканью.

3. Равенства

$$\begin{aligned} \delta e_{\alpha} &= \pi_{\alpha}^{\beta} e_{\beta}, & \delta e_{a_1} &= \pi_{a_1}^{\alpha} e_{\alpha} + \pi_{a_1}^{b_1} e_{b_1}, \\ \delta e_{p+\alpha} &= \pi_{\alpha}^{\beta} e_{p+\beta}, & \delta e_{u_1} &= \pi_{u_1}^{p+\alpha} e_{p+\alpha} + \pi_{u_1}^{e_1} e_{e_1} \end{aligned} \quad (7)$$

представляют уравнения перемещения репера структурной группы указанной G -структуры. Они показывают, что при фиксированной точке $x \in X_n$ формы π_{α}^{β} определяют согласованные инфинитезимальные перемещения векторов e_{α} и $e_{p+\alpha}$. Уравнения (7) показывают также, что плоскости $L_r(x)$ и $\tilde{L}_r(x)$, определяемые соответственно векторами e_{α} и $e_{p+\alpha}$, инвариантны при преобразованиях группы G . Поэтому на X_n возникают распределения W_r и $\tilde{W}_r$ r -мерных плоских элементов L_r и $\tilde{L}_r$. Плоскости $L_r(x)$ и $\tilde{L}_r(x)$ и касательная плоскость $E_r(x)$ к V_r лежат в одной $(2r)$ -плоскости $L_{2r}(x)$.

Из уравнений (5) вытекает, что можно ввести формы

$$\omega_{\alpha u_1}^{a_1} = \mu_{\alpha u_1}^{a_1} \omega^{u_1} + \mu_{(\alpha\beta)}^{a_1} \theta^{p+\beta}, \quad \omega_{p+\alpha}^{u_1} = \mu_{\alpha a_1}^{u_1} \omega^{a_1} + \mu_{(\alpha\beta)}^{u_1} \theta^{p+\beta}. \quad (8)$$

Тензоры $\mu_{(\alpha\beta)}^{a_1}$ и $\mu_{(\alpha\beta)}^{u_1}$ играют роль асимптотических тензоров для распределений W_r и $\tilde{W}_r$. В случае обращения в нуль какого-нибудь из этих тензоров соответствующее распределение назовем вполне геодезическим. Аффинную связность, определяемую формами ω_i^j , θ_{α}^{β} , для которой выполняются уравнения (5) и (8), назовем совместимой с (p, q, r) -тканью. Во всех таких связностях поверхности ткани будут вполне геодезическими.

Из уравнений (5) и (8) следует, что тензор кручения любой такой связности есть тензор $\{\mu_{[\alpha\beta]}^{a_1}, \mu_{[\alpha\beta]}^{u_1}, \mu_{\alpha\beta}^{\gamma}\}$. Его мы назовем тензором кручения (p, q, r) -ткани.

4. Укажем геометрический смысл обращения в нуль некоторых из тензоров, введенных в п.2. Прежде всего, $\mu_{[\alpha\beta]}^{a_1} = 0$ ($\mu_{[\alpha\beta]}^{u_1} = 0$) — необходимые и достаточные условия голономности распределения W_r ($\tilde{W}_r$). Обращение в нуль тензора кручения $\{\mu_{[\alpha\beta]}^{a_1}, \mu_{[\alpha\beta]}^{u_1}, \mu_{\alpha\beta}^{\gamma}\}$ необходимо и достаточно для голономности распределений $W_r(\lambda)$, плоские элементы которых определяются векторами $e_{\alpha} - \lambda e_{p+\alpha}$, где λ — константа. Условие $\mu_{(\alpha\beta)}^{a_1} = 0$ ($\mu_{(\alpha\beta)}^{u_1} = 0$) есть необходимый и достаточный критерий полной геодезичности распределения W_r ($\tilde{W}_r$).

В случае $\mu_{\alpha\beta}^{a_1} = \mu_{\alpha\beta}^{u_1} = 0$ и только в этом случае распределение W_{2r} будет голономным. На интегральных поверхностях W_{2r} этого распределения поверхности V_r , W_r , $\tilde{W}_r$ образуют три-ткань ⁽⁴⁾, для которой $\mu_{\alpha\beta}$ есть тензор кручения. Условия $\mu_{\alpha u_1}^{a_1} = \mu_{\alpha\beta}^{a_1} = 0$ необходимы и достаточны для того, чтобы распределение W_{q+r} плоскостей $E_{q+r}(x) = E_q(x) + E_r(x)$ было голономным. Это означает, что поверхности V_q и V_r образуют на X_n четырехугольную два-ткань ⁽⁸⁾. Если, кроме того, $\mu_{\alpha\beta}^{u_1} = 0$, то W_{q+r} распадается на указанные ранее поверхности W_{2r} , несущие три-ткань. При

$\mu_{\alpha\beta}^{a_1} = \mu_{\alpha\beta}^{u_1} = \mu_{\alpha\beta}^{\gamma} = \mu_{\alpha u_1}^{a_1} = 0$ распределение W_{q+r} голономно и каждая его интегральная поверхность расслаивается на $(q-r)$ -параметрическое семейство три-тканей из поверхностей $W_r(\lambda)$.

5. Пусть $\text{rang}(\mu_{(\alpha\beta)}^{a_1}) = p-r$ и $0 < p-r \leq 1/2r(r+1)$. Известно ⁽⁹⁾, что в таком случае с помощью тензора $\mu_{(\alpha\beta)}^{a_1}$ можно построить относительный инвариант $J \neq 0$. Полагая $W_{a_1}^{\alpha\beta} = \partial \ln J / \partial \mu_{(\alpha\beta)}^{a_1}$, получим $\mu_{\alpha\beta}^{b_1} W_{a_1}^{\alpha\beta} = r \delta_{a_1}^{b_1}$, $\mu_{\gamma\beta}^{a_1} W_{a_1}^{\alpha\beta} = (p-r) \delta_{\gamma}^{\alpha}$. Теперь нетрудно проверить, что векторы $g_{u_1} = e_{u_1} + \mu_{u_1}^{p+\gamma} e_{p+\gamma}$, где $\mu_{u_1}^{p+\gamma} = \frac{1}{p-r} \mu_{\alpha u_1}^{a_1} W_{a_1}^{\alpha\gamma}$, определяют инвариантное оснащение распределения $\bar{W}_r$. Аналогично инвариантное оснащение распределения W_r определяется векторами $g_{a_1} = e_{a_1} + \mu_{a_1}^{\gamma} e_{\gamma}$, где $\mu_{a_1}^{\gamma} = \frac{1}{q-r} \mu_{\alpha a_1}^{u_1} W_{u_1}^{\alpha\gamma}$, а $W_{u_1}^{\alpha\gamma}$ — обратный тензор для $\mu_{(\alpha\gamma)}^{u_1}$. Эти оснащения индуцируют на распределениях W_r и $\bar{W}_r$ внутреннюю аффинную связность.

6. Во втором случае ($p \leq r \leq q$) система форма (2) может быть приведена к виду

$$\theta^{r+a} = \omega^{r+a} + \omega^a, \quad \theta^{u_1} = \omega^{u_1}, \quad (9)$$

где $a, b, c = 1, \dots, p$; $u_2, v_2, w_2 = p+1, \dots, r$; $u_1, v_1, w_1 = r+p+1, \dots, n$. Теперь векторы e_a касаются поверхностей V_p , $e_{u_1}, e_{r+a}, e_{u_2}$ — поверхностей V_q , $f_a = e_a - e_{r+a}$, e_{u_2} — поверхностей V_r . В этом случае $V_q \cap V_r = V_{r-p}$ и векторы e_{u_2} касаются поверхностей V_{r-p} .

В силу (9) и (3) система (1) приводится к виду

$$\begin{aligned} d\omega^a &= \omega^b \wedge \theta_b^a + \mu_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c, \\ d\omega^{u_1} &= \omega^{v_1} \wedge \omega_{v_1}^{u_1} + (\mu_{u_2 b}^{u_1} \omega^{u_2} + \mu_{ab}^{u_1} \omega^{r+a}) \wedge \theta^{r+b}, \\ d\omega^{r+a} &= \omega^{r+b} \wedge \theta_b^a + \omega^{u_1} \wedge \omega_{u_1}^{r+a} + \mu_{u_2 b}^a \omega^{u_2} \wedge \theta^{r+b} - \mu_{bc}^a \omega^{r+b} \wedge \omega^{r+c}, \\ d\omega^{u_2} &= \omega^{v_2} \wedge \omega_{v_2}^{u_2} + \omega^{r+a} \wedge \omega_{r+a}^{u_2} + \omega^{v_1} \wedge \omega_{v_1}^{u_2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mu_{(bc)}^a = 0$.

Величины $\{\mu_{u_2 b}^{u_1}\}, \{\mu_{u_2 b}^{u_1}, \mu_{u_2 b}^a\}, \{\mu_{u_2 b}^{u_1}, \mu_{ab}^{u_1}\}, \{\mu_{u_2 b}^{u_1}, \mu_{[bc]}^{u_1}, \mu_{u_2 b}^a, \mu_{bc}^a\}, \{\mu_{u_2 b}^{u_1}, \mu_{u_2 b}^a, \mu_{ab}^a\}$ образуют тензоры. Последний из них — первый структурный тензор G -структуры, определяемой (p, q, r) -тканью на X_n .

В силу (10) можно положить

$$\omega_{r+a}^{u_1} = \mu_{(ab)}^{u_1} \theta^{r+b}. \quad (11)$$

В аффинных связностях, совместимых с (p, q, r) -тканью, имеют место уравнения (11) и V_p, V_q, V_r будут вполне геодезическими поверхностями. Из (10) и (11) вытекает, что $\{\mu_{u_2 b}^{u_1}, \mu_{u_2 b}^a, \mu_{ab}^{u_1}, \mu_{[ab]}^c\}$ — тензор кручения (p, q, r) -ткани.

В третьем случае ($p \leq q \leq r$) система форм (2) может быть приведена к виду $\theta^{\xi} = \omega^{\xi-q} + \omega^{\xi}$; пусть $a_2, b_2, c_2 = 1, \dots, r-q$; $u_2, v_2, w_2 = p+1, \dots, r$; $\xi, \eta, \zeta = r+1, \dots, n$. Теперь векторы $e_{a_2}, e_{\xi-q}$ касаются поверхностей V_p , e_{u_2}, e_{ξ}^{η} — поверхностей V_q , $e_{a_2}, e_{u_2}, e_{\xi-q} - e_{\xi}$ — поверхностей V_r . При этом $V_q \cap V_r = V_{r-p}$, $V_p \cap V_r = V_{r-q}$, векторы e_{a_2} касаются V_{r-q} , а e_{u_2} касаются V_{r-p} .

Система уравнений (1) теперь приводится к виду

$$\begin{aligned} d\omega^{a_2} &= \omega^{b_2} \wedge \omega_{b_2}^{a_2} + \omega^{\xi-q} \wedge \omega_{\xi-q}^{a_2}, \\ d\omega^{\xi-q} &= \omega^{\eta-q} \wedge \theta_{\eta}^{\xi} + \lambda_{a_2 u_2}^{\xi} \omega^{a_2} \wedge \omega^{u_2} + \mu_{a_2 \eta}^{\xi} \omega^{a_2} \wedge \theta^{\eta} + \mu_{\eta \zeta}^{\xi} \omega^{\eta-q} \wedge \omega^{\zeta-q}, \\ d\omega^{u_2} &= \omega^{v_2} \wedge \omega_{v_2}^{u_2} + \omega^{\xi} \wedge \omega_{\xi}^{u_2}, \\ d\omega^{\xi} &= \omega^{\eta} \wedge \theta_{\eta}^{\xi} + \lambda_{c_2 u_2}^{\xi} \omega^{a_2} \wedge \omega^{u_2} + \mu_{u_2 \eta}^{\xi} \omega^{u_2} \wedge \theta^{\eta} - \mu_{\eta \zeta}^{\xi} \omega^{\eta} \wedge \omega^{\zeta}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\mu_{\eta \zeta}^{\xi}$ кососимметричны по нижним индексам.

Величины $\{\lambda_{a_2 u_2}^{\xi}, \{\lambda_{a_2 u_2}^{\xi}, \mu_{a_2 \eta}^{\xi}, \{\lambda_{a_2 u_2}^{\xi}, \mu_{u_1 \eta}^{\xi}, \{\lambda_{a_2 u_2}^{\xi}, \mu_{a_2 \eta}^{\xi}, \mu_{u_2 \eta}^{\xi}, \mu_{\eta \xi}^{\xi}\}$ образуют тензоры. Последний из них есть тензор кручения (p, q, r) -ткани и в то же время есть первый структурный тензор G -структуры, определяемой этой тканью. Поверхности ткани будут вполне геодезическими в аффинных связностях, совместимых в (p, q, r) -тканью.

Во втором и третьем случаях решены вопросы, аналогичные решенным в п.п. 3, 4 для первого случая.

Подобно тому, как это делалось в п. 5, во втором случае для тензора $\mu_{u_2 b}^{u_1}$ можно построить обратный тензор $W_{u_1}^{u_2 b}$ и с его помощью ввести векторы

$$g_{r+a} = e_{r+a} - \frac{1}{p(q-r)} \mu_{ab}^{u_1} W_{u_1}^{u_2 b} e_{u_2}, \quad g_{u_1} = e_{u_1} + \frac{1}{p(r-p)} \mu_{u_2 b}^a W_{u_1}^{u_2 b} g_{r+a},$$

которые вместе с векторами e_a определяют инвариантное оснащение V_{r-p} .

Аналогично, в третьем случае обозначим через $V_{\xi}^{a_2 u_2}$ тензор, обратный $\lambda_{a_2 u_2}^{\xi}$. С помощью этого тензора можно построить векторы

$$g_{\xi-q} = e_{\xi-q} - \frac{1}{(r-p)(n-r)} \mu_{u_2 \xi}^{\eta} V_{\eta}^{a_2 u_2} e_{a_2}, \quad g_{\xi} = e_{\xi} - \frac{1}{(r-q)(n-r)} \mu_{a_2 \xi}^{\eta} V_{\eta}^{a_2 u_2} e_{u_2},$$

которые вместе соответственно с e_u и e_a определяют инвариантное оснащение поверхностей V_{r-q} и V_{r-p} . При этом предполагается $q < r < n$.

7. (p, q, r) -ткань, которую можно отобразить на три семейства параллельных плоскостей размерностей p, q, r аффинного пространства A_n , называется параллелизуемой (p, q, r) -тканью. Необходимым и достаточным условием параллелизуемости является обращение в нуль первого и второго структурных тензоров G -структуры, определяемой ею. Первый структурный тензор в каждом из случаев мы указали, а второй возникает при продолжении систем (5), (10), (12).

Московский институт
стали и сплавов

Поступило
15 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. П. Норден, Изв. высш. учебн. завед., Математика, 4 (1963). ² G. Bol, Math. Ann., 140 (1935). ³ Chern Shiing-Shen, Abh. Hamburg math. sem., 11 (1936). ⁴ М. А. Акивис, Тр. геом. сем. ВИНТИ АН СССР, 2 (1969). ⁵ W. Blaschke, Abh. Hamburg. math. sem., 9 (1932). ⁶ G. Bol, Abh. Hamburg math. sem., 9 (1932). ⁷ Н. Азизова, Уч. зап. Московск. гос. пед. инст. им. В. И. Ленина, 1, № 374 (1970). ⁸ В. Бляшке, Введение в геометрию тканей, М., 1960. ⁹ П. И. Швейкин, Тр. геом. сем. ВИНТИ АН СССР, 1 (1966).