

И. А. АЛЕКСАНДРОВ, А. Е. ПРОХОРОВ

ОЦЕНКИ КРИВИЗНЫ ЛИНИЙ УРОВНЯ НА КЛАССЕ $\tilde{S}_p$

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 10 VIII 1971)

Пусть $S_p, p = 1, 2, \dots, S_1 \equiv S$, — множество всех функций

$$f(z) = z + a_{p+1}z^{p+1} + a_{2p+1}z^{2p+1} + \dots,$$

голоморфных и однолистных в круге $E = \{z: |z| < 1\}$ и отображающих E на области с p -кратной симметрией вращения относительно начала координат. Рассмотрим класс $\tilde{S}_p$, определяемый формулой

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{f(g)}{g} dg, \quad f(z) \in S_p, \quad z \in E,$$

переводящей, как известно, звездный подкласс класса S_p в его выпуклый подкласс. Исследования класса $\tilde{S}_1$, начатые М. Бернацким ⁽¹⁾, были продолжены в работах ⁽²⁻⁴⁾, установивших существование в $\tilde{S}_1$ неоднолистных функций. Для радиуса однолистности R_p класса $\tilde{S}_p$ при $p = 1$ З. Левандовским ⁽³⁾ дана оценка снизу $R_1 > \text{th } 1/2\pi = 0,91\dots$. Очевидно, $R_p > R_1$ при $p = 2, 3, \dots$

В данной работе приводятся точные верхние и нижние оценки кривизны $K_p(\varphi, r)$ линий уровня $L_p(\varphi, r)$ функций $\varphi(z) \in \tilde{S}_p$ в каждой точке круга однолистности этого класса. Теоремы 1—3, доказанные методом, предложенным в ^(5, 6), выполняют важную вспомогательную роль и включают основные трудности получения оценок $K_p(\varphi, r)$, указанных в теореме 4. Теоремы 2, 3 обобщают результат работы ⁽⁷⁾.

Теорема 1. Пусть z — фиксированная точка в круге $E, |z| = r \neq 0, \alpha$ — вещественная постоянная, $\alpha \in (0, 1]$.

Тогда область $\mathcal{D}(r, \alpha)$ значений функционала

$$I(f) = \ln \frac{z|z|^\alpha f'(z)}{f(z) \cdot |f(z)|^\alpha}$$

на классе S содержит точку $I = 0$, не зависит от $\arg z$, замкнута, ограничена, выпукла и симметрична относительно вещественной оси.

Теорема 2. Если $0 < r < (1 - \sqrt{\alpha}) / (1 + \sqrt{\alpha})$, то принадлежащая верхней полуплоскости часть границы $\partial\mathcal{D}(r, \alpha)$ области $\mathcal{D}(r, \alpha)$ состоит из кривой $\Gamma(r, \alpha)$, задаваемой уравнением *

$$I = \Phi(r, \alpha, \lambda) + i\Psi(r, \alpha, \lambda), \quad \lambda = \text{ctg } \theta, \quad 0 < \theta < \pi,$$

где

$$\Phi(r, \alpha, \lambda) = \int_a^b \frac{u - \delta\alpha U}{1 + u^2} \left[\delta \frac{u + qu^2 - q}{U(1 + 2qu)} - 1 \right] du,$$

$$\Psi(r, \alpha, \lambda) = \int_a^b \frac{1}{1 + u^2} \left[1 - \delta \frac{u + qu^2 - q}{U(1 + 2qu)} \right] du,$$

* θ — угол, образованный внешней нормалью к $\partial\mathcal{D}(r, \alpha)$ и направлением вещественной оси.

$$U = \sqrt{u^2 - 2qu/\alpha + 1 - 1/\alpha}, \quad 2q = 1/\lambda, \quad \delta = \operatorname{sign} r, \quad v = \frac{\pm U}{\sqrt{(1+2qu)/\alpha}}.$$

При этом, если $\lambda > 0$, то $\delta = -1$, $b = \lambda(\alpha - 1)$, a — единственный отрицательный корень уравнения

$\sqrt{1+u^2} - U = \sigma(r)\sqrt{(1+2qu)/\alpha}(\sqrt{1+u^2} + u)$, $\sigma(r) = (1-r)/(1+r)$, на промежутке $-\lambda < u \leq 0$; если $\lambda < 0$ и

$$\sigma(r) < v_1^- = \frac{2\alpha\lambda}{k(\alpha, \lambda) - \sqrt{2k(\alpha, \lambda) + 4\alpha\lambda^2}},$$

где $k(\alpha, \lambda) = 1 - \sqrt{1 + 4\alpha(1-\alpha)\lambda^2}$, то $\delta = -1$ на отрезке $[a, u_1]$ и $\delta = 1$ на отрезке $[u_1, b]$, $b = \lambda(\alpha - 1)$, причем a — единственный положительный корень уравнения

$$\sqrt{1+u^2} - U = \sigma(r)\sqrt{(1+2qu)/\alpha}(\sqrt{1+u^2} + u)$$

на промежутке $0 \leq u < -\lambda$ и $u_1 = k(\alpha, \lambda)/(2\alpha\lambda)$; если $\lambda < 0$ и $\sigma(r) \geq v_1^-$, то $\delta = 1$, $b = \lambda(\alpha - 1)$, a — единственный положительный корень уравнения

$$\sqrt{1+u^2} + U = \sigma(r)\sqrt{(1+2qu)/\alpha}(\sqrt{1+u^2} + u)$$

на промежутке $u_1 \leq u < -\lambda$.

Теорема 3. Если $(1 - \sqrt{\alpha})/(1 + \sqrt{\alpha}) \leq r < 1$, то принадлежащая верхней полуплоскости часть границы $\partial\mathcal{D}(r, \alpha)$ состоит из кривой $\Gamma(r, \alpha)$, указанной в теореме 2, и прямолинейного отрезка, соединяющего точку $I_1(r, \alpha)$ с точкой $^{1/2}[I_1(r, \alpha) + I_1(r, \alpha)]$, где

$$\begin{aligned} I_1(r, \alpha) = & \ln \frac{1}{\alpha} \left(r \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{1 - \sqrt{\alpha}} \right)^{(1 - \sqrt{\alpha})^2} \left[\frac{4\alpha}{(1 + \sqrt{\alpha})^2 (1 - r^2)} \right]^{\alpha+1} + \alpha \ln(1 - r^2) - \\ & + i \left[\sqrt{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(1-r^2)[(1 + \sqrt{\alpha})^2 r^2 - (1 - \sqrt{\alpha})^2]}}{1 - \sqrt{\alpha} + (1 + \sqrt{\alpha})r^2} - \right. \\ & \left. - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(1-r^2)[(1 + \sqrt{\alpha})^2 r^2 - (1 - \sqrt{\alpha})^2]}}{1 - \sqrt{\alpha}/2 + (1 + \sqrt{\alpha}/2)r^2} \right]. \end{aligned}$$

Отметим, что в условиях теорем 2, 3 кривая $\Gamma(r, \alpha)$ пересекает вещественную ось в точке $I_1(r, \alpha) = (1 - \alpha) \ln \sigma(r) - \alpha \ln(1 - r^2) < 0$. В условиях теоремы 2 — в точке $I_2(r, \alpha) = (1 - \alpha) \ln 1/\sigma(r) - \alpha \ln(1 - r^2) > 0$. Интегралы, дающие $\Phi(r, \alpha, \lambda)$ и $\Psi(r, \alpha, \lambda)$, выражаются через элементарные функции.

Из теоремы 3 при $\alpha = 1$ получается результат О. В. Степановой⁽⁶⁾.

Теорема 4. Пусть $\varphi(z) \in \tilde{S}_p$, $|z| = r < R_p$. Обозначим

$$\underline{K}_p(r) = \min_{z \in \tilde{S}_p} K_p(z, r), \quad \bar{K}_p(r) = \max_{\varphi \in \tilde{S}_p} K_p(\varphi, r).$$

Тогда а) если $0 < r < (\sqrt{p} - 1)/(\sqrt{p} + 1)$, то

$$\bar{K}_p(r) = \frac{1}{r^p} (1 - r^p)(1 + r^p)^{p-1},$$

$$\underline{K}_p(r) = \begin{cases} \min_{\lambda \in \Lambda} \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} \exp \left[\Phi \left(r^p, \frac{1}{p}, \lambda \right) \right] & \text{при } r < \sigma(e^{-\pi}), \\ -\exp \left[\Phi \left(r^p, \frac{1}{p}, \lambda_0 \right) \right] & \text{при } r \geq \sigma(e^{-\pi}), \end{cases}$$

где Λ — множество решений уравнения

$$\arccos \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = \Psi \left(r^p, \frac{1}{p}, \lambda \right)$$

и λ_0 — корень уравнения $\Psi(r^p, \frac{1}{p}, \lambda) = \pi$;

б) если $(\sqrt{p}-1) / (\sqrt{p}+1) \leq r < R_p$, то

$$\bar{K}_p(r) = \frac{(4/p)^{1+1/p}}{r^p(1-r^{2p})/p} \left(\frac{r^p}{1-1/\sqrt{p}} \right)^{(1-1/\sqrt{p})^2} \left(\frac{1}{1+1/\sqrt{p}} \right)^{(1+1/\sqrt{p})^2},$$

$$K_p^!(r) = \begin{cases} \min_{\lambda \in \Lambda} \frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} \exp \left[\Phi \left(r^p, \frac{1}{p}, \lambda \right) \right] & \text{если } \operatorname{Im} I_1 \left(r^p, \frac{1}{p} \right) < \pi, \\ -\frac{(4/p)^{1+1/p}}{r^p(1-r^{2p})/p} \left(\frac{r^p}{1-1/\sqrt{p}} \right)^{(1-1/\sqrt{p})^2} \left(\frac{1}{1+1/\sqrt{p}} \right)^{(1+1/\sqrt{p})^2} & \text{если } \operatorname{Im} I_1 \left(r^p, \frac{1}{p} \right) \geq \pi. \end{cases}$$

В частности, $\bar{K}_1(r) = 1 / (r(1-f^2))$.

Институт прикладной математики и механики
Академии наук УССР

Донецк

Томский государственный университет
им. В. В. Куйбышева

Поступило
28 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ M. Biernacki, Bull. Acad. Polon. Sci., 8, № 1, 29 (1960). ² В. А. Похилевич, Укр. матем. журн., 17, № 4, 63 (1965). ³ Z. Lewandowski, Ann. Univ. M. Curie — Skłodowska, A17, 39 (1963—1965). ⁴ J. Krzyz, Z. Lewandowski, Bull. Acad. Polon. Sci., 11, № 7, 447 (1963). ⁵ И. А. Александров, Сибирск. матем. журн., 4, № 1, 17 (1963). ⁶ И. А. Александров, В. И. Попов, Там же, 6, № 1, 16 (1965). ⁷ И. А. Александров, Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного, М., 1960. ⁸ О. В. Степанова, Вопр. геометр. теории функций, в. 6, Тр. Томск. ун-в., 210, 97 (1969).