Доклады Академии наук СССР
1971. Том 200, № 3

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛОВ ИНТЕГРАЛЬНОГО ВИДА ОТ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 24 III 1971)

Пусть $x(t)$, $t\geqslant 0$,— непрерывный с вероятностью 1, однородный, возвратный ($P\{x(t)\neq x,\ t\geqslant 0\}=0$ для всех $x\in R_1$) диффузионный процесс с коэффициентами сноса $a(x)$ и диффузии $b(x)>0$, $f(x)$, $x\in R_1$,— неслучайная функция, не имеющая разрывов второго рода и множество точек разрыва которой не имеет конечных предельных точек. Введем в рассмотрение случайный процесс

$$\xi(t)=\int_0^t f(x(s))\,ds,\quad t\geqslant 0$$

(не нарушая общности, будем считать, что $x(0)=0$ с вероятностью 1).

Пусть

$$\mu_t(y_1,\ldots,y_r)=\inf(s\colon\ s>t,\ x(s)\in\{y_1,\ldots,y_r\},$$

$$\tau(k)=\inf(s\colon\ s>\mu\tau(k-1)(-1,\,1),\quad x(s)=0),\quad k\geqslant 1,\ \tau(0)=0.$$

Очевидно, $\varkappa(k)=\tau(k)-\tau(k-1)$, $k\geqslant 1$,— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. В ([1]) приведен ряд условий, достаточных для того, чтобы выполнялось условие

А): $P\{\varkappa(1)>x\}\sim c'x^{-\alpha}h(x)$ при $x\to\infty$, где $\alpha\in(0,1]$, $c'=\mathrm{const}>0$, $h(x)$ — медленно меняющаяся функция ($\varkappa(1)$ принадлежит области притяжения устойчивого закона с показателем α).

Нетрудно показать, что при этом

$$\sum_{k=1}^{[t^\alpha H(t)]}\frac{\varkappa(k)}{t}\overset{\text{сл}}{\Longrightarrow}\tau_\alpha\ \text{при}\ t\to\infty,$$

где

$$H(t)^{-1}=\begin{cases}c'\displaystyle\int_0^t\frac{h(x)}{x}\,dx, & \text{если}\ \alpha=1,\\ c'h(t), & \text{если}\ \alpha<1\end{cases}$$

(очевидно, $H(t)$ — медленно меняющаяся функция),

$$M\exp\{-s\tau_\alpha\}=e^{-s^\alpha c(\alpha)},$$

$$c(\alpha)=\begin{cases}1, & \text{если}\quad \alpha=1,\\ \alpha\displaystyle\int_0^\infty\frac{e^{-x}-1}{x^{\alpha+1}}\,dx, & \text{если}\quad \alpha<1.\end{cases}$$

Пусть $\tau_\alpha(t)$, $t\geqslant 0$,— однородный процесс с независимыми приращениями, для которого

$$M\exp\{-s\tau_\alpha(t)\}=\exp\{-ts^\alpha c(\alpha)\},\quad t\geqslant 0.$$

Очевидно, случайный процесс $\tau_\alpha(t)$, $t \geqslant 0$, строго монотонно возрастающий с вероятностью 1 и, следовательно, случайный процесс

$$\nu_\alpha(t) = \sup(s:\ \tau_\alpha(s) \leqslant t), \quad t \geqslant 0,$$

непрерывен с вероятностью 1.

В ([1]) приведены условия, достаточные для выполнения условий

$$\text{В}_k): \quad M\left(\int_0^{\tau(1)} |f(x(s))|\,ds\right)^k < \infty,$$

и явные выражения через функции $a(x)$, $b(x)$, $f(x)$ для констант

$$c = M\int_0^{\tau(1)} f(x(s))\,ds \ \text{ и } \ \sigma^2 = D\int_0^{\tau(1)} f(x(s))\,ds$$

(в общем случае они громоздки и поэтому здесь не приводятся).

Через $R_{\zeta(s),\,T}$ будем обозначать пространство измеримых функционалов, определенных на D_T (D_T — пространство функций на $[0, T]$ без разрывов второго рода), непрерывных в равномерной топологии почти всюду по мере, соответствующей случайному процессу $\zeta(s)$, $s \in [0, T]$. Пусть также $w(t)$, $t \geqslant 0$,— непрерывный с вероятностью 1 винеровский процесс.

Теорема 1. *Если выполняются условия* А) *и* В$_1$), *то*

$$\frac{\xi(st)}{t^\alpha H(t)}, \quad s \geqslant 0 \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} c\nu_\alpha(s), s \geqslant 0, \ \text{при} \ t \to \infty^*$$

и для любого функционала $f(\cdot) \in R_{c\nu_\alpha(s),\,T}$, $T > 0$,

$$f\left(\frac{\xi(st)}{t^\alpha H(t)}\right) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} f(c\nu_\alpha(s)) \ \text{при} \ t \to \infty.$$

Обозначим $\gamma(t) = \max(n:\ \tau(n) \leqslant t), t \geqslant 0$.

Теорема 2. *Если выполняются условия* А) *и* В$_2$), *то*

$$(\xi(st) - c\gamma(st)) / \sqrt{t^\alpha H(t)}, \ s \geqslant 0 \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} w(\sigma^2\nu_\alpha(s)), s \geqslant 0, \ \text{при} \ t \to \infty,$$

где случайные процессы $w(s)$, $s \geqslant 0$, *и* $\nu_\alpha(s)$, $s \geqslant 0$, *независимы, и для любого функционала* $f(\cdot) \in R_{w(\sigma^2\nu_\alpha(s)),\,T}$, $T > 0$,

$$f\left(\frac{\xi(st) - c\gamma(st)}{\sqrt{t^\alpha H(t)}}\right) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} f(w(\sigma^2\nu_\alpha(s))) \ \text{при} \ t \to \infty.$$

Замечание. Возможные предельные распределения для случайного функцинала $\xi(t)$ при $t \to \infty$ изучались в ([1]).

Рассмотрим теперь случай, когда $x(t)$, $t \leqslant 0$,— винеровский процесс. Пусть

$$a = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx,$$

$$b^2 = 4\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\int_x^{\infty} f(z)\,dz\,dy\,dx - a^2,$$

$\nu(s)$, $s \geqslant 0$,— случайный процесс, все конечномерные распределения которого совпадают с соответствующими конечномерными распределениями процесса $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant s} w(t), s \geqslant 0$.

---

* Символ $\xi_\varepsilon(s)$, $s \in S \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} \xi_{\varepsilon'}(s)$, $s \in S$, при $\varepsilon \to \varepsilon'$ означает слабую сходимость (в точках непрерывности) конечномерных распределений случайных процессов $\xi_\varepsilon(s)$, $s \in S$, и $\xi_{\varepsilon'}(s)$, $s \in S$, при $\varepsilon \to \varepsilon'$.

Т е о р е м а 3. *Если выполняется условие*

$$\mathrm{C}_1):\quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty,$$

то для любого функционала $f(\cdot) \in R_{a\nu(s),\, T}$, $T > 0$,

$$f\left(\frac{\xi(st)}{\sqrt{t}}\right) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} f(a\nu(s)) \text{ при } t \to \infty.$$

Т е о р е м а 4. *Если выполняется условие*

$$\mathrm{C}_2):\quad \int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|\, dx < \infty,$$

то для любого функционала $f(\cdot) \in R_{w(b^2\nu(s)),\, T}$, $T > 0$,

$$f\left(\frac{\xi(st) - a\gamma(st)}{\sqrt[4]{t}}\right) \overset{\text{сл}}{\Rightarrow} f(w(b^2\nu(s))) \text{ при } t \to \infty;$$

здесь случайные процессы $w(s)$, $s \geqslant 0$, *и* $\nu(s)$, $s \geqslant 0$, *независимы.*

Теоремы 3 и 4 представляют частный вариант теорем 1 и 2. Для доказательства теорем 1 и 2 используются результаты, приведенные в [2].

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
24 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Р. З. Х а с ь м и н с к и й, Матем. заметки, 4, 5 (1968). [2] Д. С. С и л ь в е с т р о в, ДАН, 200, № 1 (1971).