Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 1

УДК 532.135:532.546

МЕХАНИКА

М. А. САТТАРОВ

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ФИЛЬТРАЦИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 4 VIII 1971)

В настоящее время установлено ([1-3]), что молекулярно-поверхностные эффекты контакта жидкости с твердым телом в зависимости от классификации жидкости могут проявляться в глубь жидкости от 0,001 μ для очень чистых неполярных неполимерных жидкостей, до 10 μ и более для полярных жидкостей, полимеров и полимерных растворов.

В связи с этим в насыщенной жидкостью микропористой среде в основном проявляются следующие внутренние молекулярно-поверхностные эффекты взаимодействия: 1) жидкость — пористый скелет, 2) жидкость — взвешенная частица поверхностно-активных веществ или молекулы других тел, 3) неподвижная скелет — взвешенная «смоченная» или «нейтральная» частица, в том числе инородная молекула.

Рассмотрим простейший случай горизонтального течения жидкости в идеальной, состоящей из системы одинаковых капилляров (или щелей) однородной узкопористой среде, в которой, не уменьшая общности, можно ограничиться изучением движения жидкости в одном капилляре (в щели) при отсутствии силы тяжести. В этом случае главный вектор внутренних молекулярно-поверхностных сил $\mathbf{N}$ можно рассматривать как нормальное внутреннее давление, перпендикулярное к стенке капилляра (щели). При отсутствии внешних сил данная сила — она непрерывная или кусочно-непрерывная — в данной точке жидкого объема может находиться в полном механическом равновесии с массовыми силами, в частности с силой тяжести, и придать определенную ориентированность молекулярным слоям жидкости, образуя прочно и рыхло связанную жидкость во всем объеме или в некоторой его части. Иначе говоря, каждая молекула жидкости более или менее фиксируется в определенных точках порового микропространства, и перемещение каждого молекулярного слоя определенным образом зависит от условия взаимодействия $\mathbf{N}(\xi)$ с внешними силами: движение определенного слоя происходит лишь в том случае, когда равнодействующая внешних сил превосходит силу внутреннего сопротивления данного слоя, составляющими которой являются сила $\mathbf{N}(\xi)$ и массовые силы (сила тяжести). При таком представлении предельное напряжение сдвигу τ_0 можно считать функцией точки микропорового пространства,

$$\tau_0 = \mu\mathbf{N}(\xi) \tag{1}$$

(μ — вязкость жидкости). Тогда известное гидродинамическое уравнение течения вязкопластической жидкости можно записать как ([4], [5])

$$-\mu\frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{1+\nu}\rho gJ\xi - \mu N(\xi), \tag{2}$$

где v — скорость частицы жидкости в точке ξ поперечного сечения капилляра (щели) — направлена вдоль капилляра (щели), J — градиент напора, ρ — плотность жидкости, g — ускорение силы тяжести, $\nu = 1$ соответствует капиллярной, $\nu = 0$ — щелевой моделям.

Несмотря на некоторую схематичность, решение этого уравнения при $\nu = 1$, $N(\xi) \equiv 0$ применительно к описанию движения влаги в ненасыщенной пористой среде ([6]) превосходно согласовывалось с опытными даными. Применимость решения уравнения (2) при $\nu = 1$, $N(\xi) \equiv \text{const}$ к масляным краскам, различным пастам, суспензиям глины и почв было отмечено ранее ([4]).

Выделим две группы A и $Б$ жидкостей по характеру их течения. Течение жидкостей группы A начинается с центра капилляра (щели), а скорость v своего максимума достигает только в точке $\xi = 0$ (в центре поперечного сечения капилляра (щели)). Течение жидкостей группы $Б$ под действующим градиентом J, превышающим так называемый начальный градиент напора J_0 на ε — малую величину, начинается сразу же во всем объеме капилляра (щели). Следовательно, течение жидкостей группы A происходит в расширяющейся области $(\nu - 1)\xi_* \leqslant \xi \leqslant \xi_*$, где ξ_* зависит только от J. Величина ξ_* определяется из уравнения (2) в предположении, что в этой точке v достигает своего экстремального значения, т. е.

$$\left.\frac{dv}{d\xi}\right|_{\xi=\xi_*} = 0,$$

$$\xi_* = \frac{(1+\nu)\mu}{\rho g J} N(\xi_*). \tag{3}$$

Для группы A данное равенство имеет место только при $N(\xi_*)$, для которых рост J повлечет за собой увеличение ξ_*. При выполнении условия прилипания, т. е. $v(\xi_*) = 0$, из (2) для v получим

$$v = \frac{\rho g J}{2(1+\nu)\mu}(\xi_*^2 - \xi^2) - \int\limits_{\xi}^{\xi_*} N(\xi)\,d\xi. \tag{4}$$

Отсюда расход q через площадь поперечного сечения капилляра (щели единичной длины) с диаметром (шириной) $D_* = 2\xi_*$ определяется из выражения

$$q = (2\pi)^\nu \int\limits_{\xi_*(\nu-1)}^{\xi_*} v\xi^\nu d\xi, \quad \nu = 0;\ 1. \tag{5}$$

Тогда, учитывая связь между скоростью фильтрации и истинной средней скоростью потока

$$V = \sigma v_{\text{ср}} \equiv \frac{\sigma q}{\pi^\nu \xi^{\nu+1}[1-(\nu-1)^{\nu+1}]},$$

для V получаем выражение

$$V = \frac{(2\pi)^\nu \sigma\rho g\xi_*^2}{\pi^\nu(1+\nu)^2(3+\nu)\mu}\left\{J - \frac{(1+\nu)^2(3+\nu)\mu}{[1-(\nu-1)^{\nu+1}]\rho g\xi_*^{\nu+3}} \int\limits_{\xi_*(\nu-1)}^{\xi_*} \xi^\nu \left[\int\limits_{\xi}^{\xi_*} N(\eta)\,d\eta\right] d\xi\right\}, \tag{6}$$

где σ — эффективная пористость, равная общему объему взаимосвязанных поровых микропространств в единице объема пористых тел. Закономерность (6) имеет место для таких J, под действием которых происходит и течение жидкости, и расширение активной пористости фильтрующей среды за счет снятия связанной жидкости. Когда увеличения пористости не происходит или же оно такое незначительное, что с удовлетворительным приближением можно принять D_* равным истинному диаметру D, тогда вместо (6) имеем

$$V = k(J - I_R) \tag{7}$$

(k — коэффициент фильтрации),

$$k = \frac{(2\pi)^\nu \rho g R^2 \sigma}{\pi^\nu(1+\nu)^2(3+\nu)\mu},$$

$$I_R = \lim_{\xi_* \to R} \varphi(\xi_*) \equiv \lim_{\xi_* \to R} \frac{(1+\nu)^2(3+\nu)\mu}{[1-(\nu-1)^{\nu+1}]\rho g\xi_*^{\nu+3}} \int\limits_{\xi_*(\nu-1)}^{\xi_*} \xi^\nu \left[\int\limits_{\xi}^{\xi_*} N(\eta)\,d\eta\right] d\xi. \tag{8}$$

В очень узких капиллярах (щелях) — микропорах, где поверхностные силы могут существенно менять обычную молекулярную структуру жидкости, фильтрация может начинаться лишь после преодоления внутренних молекулярных сил сцепления, т. е. лишь после достижения начального градиента напора J_0, который определяется из уравнения

$$J_0 = \lim_{\xi_* \to 0} \frac{(1+\nu)\mu}{\rho g \xi_*} N(\xi_*).$$

Тогда процесс фильтрации жидкостей группы A можно представить как

$$V = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant J \leqslant J_0, \\ k f_*^2\left(\frac{J}{J_R}\right)\{J - [f(J) - I_0]\}, & J_0 < J < J_R, \\ k[J - (I_R - I_0)], & J_k \leqslant J < J_{\text{кр}}, \end{cases} \tag{9}$$

где $f(J)$ — сложная фракция, $f(J) \equiv \varphi(\xi_*(J))$, причем φ определяется из равенства (8), а $\xi_*(J)$ из уравнения (3), кроме того,

$$I_0 = \lim_{\xi_* \to 0} \varphi(\xi_*) \equiv f(J_0), \quad \frac{\xi_*}{R} = f_0\left(\frac{J}{J_R}\right), \quad J_R = \lim_{\xi_* \to R} \frac{(1+\nu)\mu}{\rho g \xi_*} N(\xi_*).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи представления $N(\xi)$.

1) $$N(\xi) = \alpha_n R(\xi / R)^n, \tag{10}$$

где R — истинный радиус (половина ширины) капилляра (щели), α_n и n — константы, характеризующие влияние поверхностного эффекта на границе контакта и в жидком микрообъеме соответственно, причем для жидкостей группы A $n > 1$.

Согласно предыдущим рассуждениям получаем следующую закономерность фильтрации:

$$V_n = \begin{cases} k_n \frac{n-1}{n+\nu+2} J_R \left(\frac{J}{J_R}\right)^{(n+1)/(n-1)}, & 0 \leqslant J < J_R, \\ k_n\left[J - \frac{\nu+3}{n+\nu+2} J_R\right], & J_R \leqslant J < J_{\text{кр}}, \end{cases} \tag{11}$$

где

$$J_R = \frac{(1+\nu)\mu_n \alpha_n}{\rho_n g}, \quad J = J_R\left(\frac{\xi_*}{R}\right)^{n-1}.$$

2) $$N(\xi) = \alpha_n \xi e^{n\xi}. \tag{12}$$

При этом получаем соответственно для щели:

$$V_n = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant J \leqslant J_0, \\ k_n\left(\frac{\ln(J/J_0)}{\ln(J_R/J_0)}\right)^2\left\{J - \frac{3}{2}J\left(\ln\frac{J}{J_0}\right)^2\left[\ln\frac{J}{J_0} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{J}{J_0}\right)^2\right]\right\}, & J_0 < J < J_R, \\ k_n[J - A_1(J_R, J_0)], & J_R \leqslant J < J_{\text{кр}}; \end{cases} \tag{13}$$

для капилляра:

$$V_n = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant J \leqslant J_0 \\ k_n\left(\frac{\ln(J/J_0)}{\ln(J_R/J_0)}\right)^2\left\{J - 4J\left(\ln\frac{J}{J_0}\right)^{-4}\left[\left(\ln\frac{J}{J_0}\right)^3 - 3\left(\ln\frac{J}{J_0}\right)^2 + \right.\right. & \\ \left.\left. + 6\ln\frac{J}{J_0} - 6 + 6\frac{J_0}{J}\right]\right\}, & J_0 < J < J_R, \\ k_n[J - A_2(J_R, J_0)] & J_R \leqslant J < J_{\text{кр}}; \end{cases} \tag{14}$$

$J_{\text{кр}}$ — градиент, при котором нарушается ламинарность течения, через A_1 и A_2 обозначены вторые члены, находящиеся внутри фигурной скобки второй строки с заменой J на J_R,

$$J_0=(1+\nu)\mu_n\alpha_n/(\rho_n g),\qquad J_R=J_0e^{nR},\qquad J=J_0e^{n\xi}.$$

Из (11), (13) и (14) мы видим, что геометрия порового пространства оказывает влияние на динамику фильтрации, причем в случае 1) оно сказывается лишь на постоянных коэффициентах.

Течение жидкостей группы *Б*, согласно принятому выше условию, должно начинаться сразу же во всем объеме капилляра (щели). Как следует из уравнения (3), оно имеет место, если $\mathrm{N}(\xi)$ — линейная или же убывающая функция ξ. При этом минимальный (начальный) градиент, под действием которого только начинается движение, определяется формулой

$$J_0=\frac{(1+\nu)\mu_n}{\rho_n gR}N(R); \tag{15}$$

действующий градиент

$$J_*\equiv J=\frac{(1+\nu)\mu_n N(\xi)}{\rho_n g\xi}>J_0, \tag{16}$$

ускоряя процесс во всем объеме, еще обусловливает послойное последовательное относительное перемещение ориентированных молекулярных слоев, начиная от стенки, внутри области $\xi_*\leqslant\xi\leqslant R$ и расширяет эту область. При этом область $\xi\leqslant\xi_*=\dfrac{(1+\nu)\mu_n}{\rho gJ}N(\xi_*)$ жидкости движется как целое, т. е. как твердый стержень.

В рассматриваемом случае скорость v частицы имеет аналогичный вид (4), в которой ξ_* заменяется константой R, и для частного случая представления $N(\xi)$ в виде (10) в интервале $-\infty\leqslant n\leqslant 1$ получаем закономерность фильтрации

$$V_n=\begin{cases}0, & 0\leqslant J\leqslant J_0,\\ k_n\left[J-\dfrac{3+\nu}{n+\nu+2}J_0-\dfrac{n-1}{n+\nu+2}J_0\left(\dfrac{J}{J_0}\right)^{\frac{n+\nu+2}{n-1}}\right], & J_0<J<J_{\text{кр}}.\end{cases} \tag{17}$$

Отсюда при $n={}^1/_4(1-\nu)$ ($\nu=0$ соответствует щелевой, $\nu=1$ — капиллярным моделям) имеем известную формулу Букингема — Рейнера

$$V=kJ[1-{}^4/_3(J_0/J)+{}^1/_3(J_0/J)^4]. \tag{18}$$

Другими словами, один и тот же результат (18) следует из совершенно разных по геометрической форме моделей: из капиллярной модели при постоянстве предельного напряжения сдвига $\tau_0\equiv\mathrm{const}$ и из щелевой модели при действии функции предельного напряжения сдвига в виде $\tau_0=\mu_n\alpha_n R(\xi/R)^{0,25}$.

Этот результат показывает, что опытно установленная сдвиговая прочность чистых жидкостей ([7]) может быть обусловлена также другими факторами, в частности, свойством и геометрией самой фильтрующей среды.

Отдел математики с вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
22 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Дерягин и др., ЖТФ, 27, в. 5, 1076 (1957). [2] Исследования в области поверхностных сил. Сборн. докл. на I—III конференции по поверхностным силам, М., 1961, 1964, 1967. [3] Г. Л. Михневич, В. Г. Заремба, Колл. журн., 24, 491 (1962). [4] М. Рейнер, Десять лекций по теоретической реологии, М.— Л., 1947. [5] Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. I, 1963. [6] С. Ф. Аверьянов, ДАН, 69, № 2 (1949). [7] Н. Ф. Бондаренко, Исследования природы фильтрационных аномалий. Автореф. докторской диссертации, Л., 1968.