

В. Н. СТРАХОВ

НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ НЕЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ПЛОСКОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ПОТЕНЦИАЛА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 25 III 1971)

Хорошо известно, что в общем случае решение обратной задачи потенциала не обладает свойством единственности. Цель настоящей заметки состоит в том, чтобы на конкретных примерах выяснить значение различного рода допущений как о плотности масс, так и о топологии множеств, по которым распределены массы, а также топологии множеств, свободных от масс. Примеры относятся к случаю плоской задачи.

Пусть $s = x + iz$ — комплексная переменная, S — конечная односвязная область, ограниченная непрерывной спрямляемой кривой Γ (эта кривая может быть и нежордановой; она может иметь точки самоприкосновения, но не может иметь точек самопересечения). Если область S заполнена массами постоянной плотности δ , то комплексная напряженность

$$G(s) = g_x(x, z) + ig_z(x, z) \quad (1)$$

внешнего гравитационного поля этих масс (g_x, g_z — составляющие вектора напряженности по осям) выражается соотношением ⁽¹⁻³⁾

$$G(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{2\pi i f \delta \bar{\sigma}}{\sigma - s} d\sigma, \quad s \in S + \Gamma \quad (2)$$

(f — универсальная гравитационная постоянная).

Покажем прежде всего, что связность внешности ($C\bar{S}$) области $\bar{S}$ играет в проблеме единственности важную роль даже в случае масс постоянной плотности. Именно, существуют различные конечные односвязные области S_1 и S_2 , при заполнении которых массами одной и той же плотности δ создаются тождественные внешние поля. Неоднозначность здесь связана с тем, что для области S_1 граница Γ_1 жорданова и $C\bar{S}_1$ односвязна, а для области S_2 граница Γ_2 нежорданова и $C\bar{S}_2$ несвязна.

Для этого рассмотрим алгебраические кривые четвертого порядка, называемые гиперболической лемнискатой Бота (γ_1) и лемнискатондой (γ_2). Их уравнения в декартовых координатах суть

$$(\xi^2 + \zeta^2)^2 = (2a^2 + b^2)\xi^2 - (2a^2 - b^2)\zeta^2, \quad a^2 < b^2 < 2a^2; \quad (3)$$

$$(\xi^2 + \zeta^2)^2 = (2a^2 - b^2)\xi^2 - (2a^2 + b^2)\zeta^2, \quad a^2 < b^2 < 2a^2. \quad (4)$$

Эти кривые петлеобразного типа, аналитические, имеющие в начале координат точку самопересечения, симметричные относительно координатных осей. Обозначим через Σ_1 и Σ_2 конечные односвязные области, ограниченные частями γ_1^* и γ_2^* кривых γ_1 и γ_2 , расположенными в левой полуплоскости $\xi \leq 0$. Нетрудно показать, что область $S_2 = \Sigma_1 - \Sigma_2$ есть конечная односвязная область, ограниченная кривой $\Gamma_2 = \gamma_1^* + \gamma_2^*$, имеющей в начале точку самоприкосновения. Это нежорданова кривая; внешность $C\bar{S}_2$ области S_2 представляет несвязное множество из двух связанных компонент: односвязной области $C\bar{\Sigma}_1$ и односвязной области Σ_2 . Компоненты разделены точкой $\sigma = 0$, которая принадлежит γ_2^* и γ_1^* . Обозначим через S_1 круг радиуса $b/\sqrt{2}$ с центром в точке $s_0 = -a$.

Теорема 1. Внешнее гравитационное поле масс, распределенных с плотностью δ по области S_2 , эквивалентно внешнему полю масс, распределенных с той же плотностью по области S_1 .

Доказательство. Из (3) и (4), полагая $\xi = (\sigma + \bar{\sigma})/2$, $\zeta = (\sigma - \bar{\sigma})/(2i)$ и разрешая получающиеся уравнения относительно $\bar{\sigma}$, находим уравнения кривых γ_1^* и γ_2^* (границ областей S_1 и S_2) в форме А. В. Циркульского ⁽¹⁾:

$$\Phi_1(\sigma) = \bar{\sigma} = \frac{+b^2\sigma + \sigma \sqrt{[b^4 + 4a^2(\sigma^2 - a^2)]}}{2(\sigma^2 - a^2)}; \quad (5)$$

$$\Phi_2(\sigma) = \bar{\sigma} = \frac{-b^2\sigma + \sigma \sqrt{[b^4 + 4a^2(\sigma^2 - a^2)]}}{2(\sigma^2 - a^2)}. \quad (6)$$

В силу (2) для комплексной напряженности внешнего поля масс в S_2 отсюда находим

$$G(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1^*} \frac{2\pi i \delta \Phi_1(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2^*} \frac{2\pi i \delta \Phi_2(\sigma)}{\sigma - s} d\sigma =$$

$$= + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi i \delta b^2 \sigma}{\sigma^2 - a^2} \frac{d\sigma}{\sigma - s} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\pi i \delta \sigma \sqrt{[b^4 + 4a^2(\sigma^2 - a^2)]}}{\sigma^2 - a^2} \frac{d\sigma}{\sigma - s}, \quad (7)$$

где C — произвольный замкнутый контур, принадлежащий области S_2 и охватывающий точку $s_0 = -a$.

Отсюда на основании теоремы о вычетах

$$G(s) = -\pi i \delta b^2 / (a + s). \quad (8)$$

Но выражением (8) как раз и дается внешнее поле масс плотности δ в S_1 , что и доказывает теорему.

Заметим теперь, что если область S_2 повернуть на угол φ против часовой стрелки при центре вращения в точке $s_0 = -a$ и полученную таким образом область обозначить через $S_{2,\varphi}$, то внешнее поле масс плотности δ , распределенных по $S_{2,\varphi}$, будет даваться тем же самым выражением (8). Следовательно, справедлива

Теорема 2. Существует множество различных конечных односвязных областей S , заполненных массами плотности δ , мощности континуум, внешние поля которых представляют собой поле одного и того же точечного источника.

Естественно, что для распределений масс с переменной плотностью эквивалентность может быть еще более сильной. Так, уже в классе масс кусочно-постоянной плотности, распределенных по конечным односвязным областям, ограниченным жордановыми кривыми, одним и тем же внешним полям (функциям $G(s)$) может соответствовать множество существенно различных (не сводимых друг к другу вращением) кусочно-постоянных распределений масс мощности континуум. Этот факт устанавливается ниже для функций $G_1(s) = -K_1/s$ и $G_2(s) = K_2/s^2$, выражающих комплексную напряженность внешних полей точечного источника и диполя. Одновременно получается и физическая интерпретация поля диполя в классе кусочно-постоянных распределений масс по конечной односвязной области.

Рассмотрим внешние гравитационные поля, для которых

$$G(s) = -2if(m_0/s + m_1/s^2), \quad m_0 > 0. \quad (9)$$

В. К. Иванов показал ⁽⁴⁾, что если $G(s)$ в (9) есть комплексная напряженность внешнего поля от однородного распределения масс по конечной односвязной области S с жордановой границей Γ , то эта область получается конформным отображением единичного круга с помощью полинома второй степени.

Очевидно, если в (9) $\arg m_1 = 0$, то область S имеет ось Ox осью симметрии, а центр масс располагается правее начала координат

($m_1 = s_c m_0$, где s_c — аффикс центра масс). Поля вида (9) при $\arg m_1 \neq 0$ можно рассматривать как поля областей, получаемых вращением вокруг начала тех областей, комплексные напряженности которых описываются функциями $G(s) = -2if(m_0/s + |m_1|/s^2)$.

Заметим еще, что в (9) m_0 и m_1 можно интерпретировать как гармонические моменты масс в S относительно начала (гармонические моменты

$m_n, n = 0, 1, 2, \dots$, вводятся разложением Лорана $G(s) = -2if \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{s^{n+1}}$;

для них справедливо представление $m_n = \delta \int_S \sigma^n d\xi d\zeta$). В силу (2) имеем

$$m_n = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma} \bar{z}^n d\sigma, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Теорема 3. Функция (9) с $\arg m_1 = 0$ представляет комплексную напряженность внешнего поля масс плотности $\delta > 0$, распределенных по конечной односвязной области S с жордановой границей Γ , в том и только том случае, когда уравнение

$$\lambda^3 - \frac{\eta}{2\delta} \lambda + \frac{\eta}{2\delta} = 0, \quad (11)$$

где

$$\eta = m_0^3 / (\pi m_1^2) > 0, \quad (12)$$

имеет корень λ_0 в интервале $1 < \lambda \leq 5$.

Доказательство. Пусть $t = \mu + iv$ — комплексная переменная, $s = s(t)$ — функция, реализующая конформное и однолистное отображение единичного круга на область S . В силу теоремы В. К. Иванова (*) должно быть при $\arg m_1 = 0$ *

$$s(t) = at^2 + bt, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad 0 < v = a/b \leq 2. \quad (13)$$

Подставляя в (10) $\sigma = bv(vt + 1)$, получаем

$$m_0 = \delta \pi b^2 (2v^2 + 1), \quad m_1 = \delta \pi b^3 v. \quad (14)$$

Вводя замену $\lambda = 2v^2 + 1$ и исключая b из уравнений (14), приходим к уравнению (11) для λ . Ограничения на v из (13) эквивалентны ограничению на λ : $1 < \lambda \leq 5$. Отсюда и получаются утверждения теоремы.

Следствие. Любая $G(s)$ из (9) с заданным m_0 и произвольным m_1 или с заданным m_1 и произвольным m_0 , для которой выполнены условия теоремы 3, представляет комплексную напряженность масс плотности δ , распределенных по конечной односвязной области S , симметричной относительно оси Ox и ограниченной жордановой кривой Γ . Все эти области звездны относительно начала. Мощности множества областей при заданных δ и m_0 или δ и m_1 есть континуум.

Пусть S — произвольная из областей из приведенного следствия. Обозначим через S^* область, симметричную к S относительно оси Oz , через $S \cup S^*$ и $S \cap S^*$ — объединение и пересечение этих областей соответственно. Обозначим далее через Σ_- и Σ_+ области между кривыми Γ и Γ^* , ограничивающими части областей S^* и S , принадлежащие полуплоскостям $x \leq 0$ и $x \geq 0$ соответственно (эти области не содержат точек $S \cap S^*$). Очевидно, если $G^*(s)$ есть комплексная напряженность масс плотности δ в S^* , то

$$G^*(s) = -2if \left(\frac{m_0}{s} - \frac{m_1}{s^2} \right). \quad (15)$$

* Неравенство $v \leq 2$ есть условие однолистности отображения (*).

Теорема 4. Комплексная напряженность $G^{(1)}(s)$ внешнего поля масс, распределенных по Σ_- и Σ_+ с плотностью $\delta/2$, а по $S \cap S^*$ с плотностью δ , есть комплексная напряженность точечного источника массы m_0 : $G^{(1)}(s) = -2ifm_0/s$.

Теорема 5. Комплексная напряженность $G^{(2)}(s)$ внешнего поля масс, распределенных по Σ_- с плотностью $-\delta/2$, а по Σ_+ с плотностью $+\delta/2$, есть комплексная напряженность диполя: $G^{(2)}(s) = -2ifm_1/s^2$.

Из теорем 4 и 5 и вытекает справедливость утверждений, высказанных после теоремы 2.

Институт физики Земли
им. О. Ю. Шмидта
Академии наук СССР
Москва

Поступило
18 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. В. Цирульский, Изв. АН СССР, сер. геофизика, № 7 (1963). ² Г. Я. Голиздра, В кн. Дополнительные главы курса гравиразведки и магниторазведки, Новосибирск, 1966. ³ В. Н. Страхов, Изв. АН СССР, сер. Физика Земли, № 12 (1970). ⁴ В. К. Иванов, ДАН, 105, № 12 (1955). ⁵ Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, Изд. 2-е, М., 1966.