

УДК 519.4 : 517 : 513.88

МАТЕМАТИКА

Ю. М. ВУВУНИКЯН

КРИТЕРИИ ГЛАДКОСТИ И АНАЛИТИЧНОСТИ ПОЛУГРУППЫ-ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИИ В ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 14 IX 1971)

1. Основная цель этой статьи — дать необходимые и достаточные условия гладкости на $(0, +\infty)$ и аналитичности на секторе $\Sigma_a = \{\lambda \mid |\arg \lambda| < a, \lambda \neq 0\}$, $0 < a < 1/2\pi$, полугруппы-обобщенной функции T эндоморфизмов квази-полного локально выпуклого пространства X . Будем пользоваться обозначениями и некоторыми понятиями работы (8).

Определение 1. Пусть (μ_n) — сохраняющая последовательность финитных справа бесконечно дифференцируемых функций и в пространстве Y_n существует непрерывный C_n^{-1} . И пусть $R_n(\lambda)$ — операторнозначная функция, определенная и сильно аналитическая в некоторой области Λ_n комплексного переменного и такая, что

$$[C_n^{-1} L_n(\delta \otimes x)](l\omega_n^{-1} f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Lambda_n} (l\omega_n f)(\lambda) R_n(\lambda) x d\lambda, \quad f \in \mu_n K, \quad x \in X,$$

где l — преобразование Лапласа, $\partial \Lambda_n$ — граница Λ_n .

Тогда $R_n(\lambda)$ называется (μ_n, Λ_n) -резольвентой оператора A (оператор C_n зависит от A). Области Λ_n будем называть допустимыми областями для $R_n(\lambda)$, а последовательность (R_n) — резольвентной последовательностью оператора A .

Определение 2. Полугруппа-обобщенная функция T называется непрерывной (k раз дифференцируемой, аналитической на секторе Σ_a), если выполнены следующие два условия:

- а) $T(\delta_t)$ — эндоморфизм пространства X для всех $t \geq 0$;
- б) для произвольного $x \in X$ функция $x(t) = T(\delta_t)x$, $t \in (0, +\infty)$, непрерывна (соответственно k раз дифференцируема, аналитически продолжима на сектор Σ_a).

2. Исследуем сначала, какие условия на $R_n(\lambda)$ обеспечивают порождение оператором A непрерывных полугрупп-обобщенных функций, которые мы для краткости будем называть C -полугруппами.

Теорема 1. Пусть (μ_n) — сохраняющая последовательность, причем $\sup \mu_n \subset (-\infty, n]$ и $\mu_n(t) \equiv 1$ на $(-\infty, n - 1/4]$.

Для того чтобы замкнутый линейный оператор A с плотной в X областью определения порождал C -полугруппу, необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое целое $N > 0$, что для произвольного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$, области

$$\Lambda_n = \left\{ \lambda \mid |\operatorname{Im} \lambda| > \exp \left(\frac{\varepsilon - n}{N} \operatorname{Re} \lambda \right), \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \right\} \cup \Pi$$

(Π — правая полуплоскость) являются допустимыми для $R_n(\lambda)$, и семейства операторов

$$\{(1 + |\lambda|)^{Nn/(1-\varepsilon)} R_n(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda_n\}, \quad (1)$$

равностепенно непрерывны.

Доказательство. 1) Пусть A — инфинитезимальный оператор C -полугруппы T . Положим $R_n(\lambda) = (\mu_n T)(e^{-\lambda(\cdot)})$ и рассмотрим $(\mu_n - \rho_\varepsilon)T$, где ρ_ε — регуляризующая функция, равная тождественно единице на $[0, \varepsilon/2]$ и такая, что $\text{supp } \rho_\varepsilon \subset (-\infty, \varepsilon]$. В силу сильной непрерывности функции $(\mu_n - \rho_\varepsilon)T$ имеем при $\text{Re } \lambda \leq 0$ оценку

$$p((\mu_n - \rho_\varepsilon)Tx)(e^{\lambda(\cdot)}) \leq C_{n,\varepsilon} e^{-n \text{Re } \lambda} q(x), \quad (2)$$

где p, q — непрерывные полунормы.

Так как $\text{supp } (\rho_\varepsilon T) \subset [0, \varepsilon]$, то имеет место оценка

$$p((\rho_\varepsilon T)x)(e^{-\lambda(\cdot)}) \leq M_\varepsilon(1 + |\lambda|)^N e^{-\varepsilon \text{Re } \lambda} q(x), \quad (3)$$

для всех $\text{Re } \lambda \leq 0$.

Из (2) и (3) и того, что при $\lambda \in \Pi$

$$p(R_n(\lambda)x) \geq R_n(1 + |\lambda|)^N q(x),$$

получаем, что при $\lambda \in \Lambda_n$

$$p(R_n(\lambda)x) \leq Q_{n,\varepsilon}(1 + |\lambda|)^{nN/(n-\varepsilon)} q(\lambda). \quad (4)$$

В силу того, что $\omega_n \varphi$ быстро убывает вдоль $\partial \Lambda_n$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$, имеем

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Lambda_n} (\omega_n \varphi)(\lambda) \mu_n(t) e^{-\lambda t} d\lambda. \quad (5)$$

Из (4) и (5) следует необходимость условий теоремы.

2) Пусть условия теоремы выполнены. Положим

$$T(\varphi)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Lambda_n} (\omega_n \varphi)(\lambda) R_n(\lambda)x d\lambda \quad (6)$$

для всех $\varphi \in \mu_n K, x \in X$.

Заметим, что T — полугруппа-обобщенная функция, так как, в частности, выполнены все условия ее порождения (см. (8), теорема 1). Возьмем $\varphi = \delta_t * \rho_h$. Если $h < 1/4$ и $t \leq n - 1/2$, то $\varphi \in K_{(-\infty, n-1/4]}$, и так как по условию $\mu_n(t) \equiv 1$ на $(-\infty, n - 1/4]$, то $\omega_n \varphi = \varphi$. Тогда из (6) получим

$$T(\delta_t * \rho_h)x = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Lambda_n} e^{\lambda t} (\rho_h)(\lambda) R_n(\lambda)x d\lambda. \quad (7)$$

Разбивая $\partial \Lambda_n$ на следующие пути:

$$\gamma_- = \{\lambda | \text{Im } \lambda = -\exp(\varkappa \text{Re } \lambda), \quad \text{Im } \lambda \in (-\infty, -1)\},$$

$$\gamma_0 = \{\lambda | \text{Re } \lambda = 0, \quad \text{Im } \lambda \in [-1, 1]\},$$

$$\gamma_+ = \{\lambda | \text{Im } \lambda = \exp(\varkappa \text{Re } \lambda), \quad \text{Im } \lambda \in (1, +\infty)\},$$

где $\varkappa = (\varepsilon - n) / N$, и оценивая каждый из полученных интегралов, придем к оценке

$$p(T(\delta_t * \rho_h)x) \leq C_{n,\varepsilon} q(x) \int_1^\infty \tau^{-\varkappa^{-1}(1-\varepsilon)-1} d\tau,$$

где $C_{n,\varepsilon}$ — подходящая константа.

Последний интеграл сходится, если $t > \varepsilon$. Таким образом, семейство эндоморфизмов

$$\{T(\delta_t * \rho_h) | h \in (0, 1/4), t \in [2\varepsilon, n - 1/2]\},$$

равностепенно непрерывно. В силу произвольности ε, n и того, что $T(K_{R_+})X$ плотно в X , заключаем, что T является C -полугруппой.

3. Рассмотрим теперь k раз дифференцируемые полугруппы. На самом деле, можно ограничиться исследованием бесконечно дифференцируемых полугрупп, так как имеет место следующая теорема, хорошо известная в классическом случае (см. (1), стр. 324).

Теорема 2. Дифференцируемая полугруппа-обобщенная функция в квази-полном локально-выпуклом пространстве k раз дифференцируема, каково бы ни было целое $k > 0$.

В дальнейшем такие полугруппы мы будем называть просто D -полугруппами.

Перейдем теперь к вопросу о том, каким условиям должен удовлетворять оператор A , чтобы быть производящим оператором D -полугруппы.

Теорема 3. Пусть (μ_n) и A удовлетворяют условиям теоремы 1. Для того чтобы A порождал D -полугруппу, необходимо и достаточно выполнения условий:

1) для произвольного $\varepsilon > 0$ область

$$\Lambda(\varepsilon) = \{\lambda \mid |\operatorname{Im} \lambda| > \exp(-\varepsilon \operatorname{Re} \lambda), \operatorname{Re} \lambda \leq 0\} \cup \Pi,$$

является допустимой для всех $R_n(\lambda)$;

2) семейства операторов

$$\{(1 + |\lambda|)^{-N} R_n(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda(\varepsilon)\}, \quad (8)$$

где N — некоторое натуральное число, равномерно непрерывны.

Сделаем следующие замечания:

1) Таким образом, в отличие от C -полугруппы, допустимые области зависят лишь от ε и не зависят от n и N , а показатель степени при $1 + |\lambda|$ не зависит от n и ε .

2) Если зафиксировать ε , то A будет порождать полугруппу с ε -запаздывающей гладкостью. Явление запаздывающей гладкости решений ослабленной задачи Коши в банаховом пространстве рассматривалось в ⁽²⁾, стр. 96—97.

3) В отличие от теоремы 1, здесь N может быть равным нулю.

4. Наконец, рассмотрим вопрос о порождении аналитических на секторе Σ_a полугрупп-обобщенных функций, которые в дальнейшем будут просто называться A -полугруппами на Σ_a . Этот класс полугрупп (с условием экспоненциального роста) в банаховом пространстве изучался в работах ⁽³⁻⁶⁾ (см. также ⁽⁷⁾, § 4).

Следующая теорема дает достаточные условия порождения A -полугрупп.

Теорема 4. Пусть (μ_n) и A удовлетворяют условиям теоремы 1. И пусть выполнены условия:

1) для произвольного $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < a$, сектор

$$S_{a-\varepsilon} = \{\lambda \mid |\arg \lambda| < a - \varepsilon + 1/2\pi\}$$

является допустимой областью для всех $R_n(\lambda)$;

2) существует такое натуральное число N , что семейства операторов

$$\{(1 + |\lambda|)^{-N} R_n(\lambda) \mid \lambda \in S_{a-\varepsilon}\}$$

равностепенно непрерывны.

Тогда A порождает A -полугруппу на Σ_a .

Мы не можем, однако, доказать необходимость этих условий в силу 1) (μ_n) не может состоять из аналитических на Σ_a функций, так как финитная справа аналитическая функция тождественно равна нулю; 2) T_x не является, вообще говоря, обобщенной функцией локально конечного порядка. Учитывая эти причины, мы дадим следующую характеристику производящего оператора A -полугруппы на Σ_a .

Теорема 5. Пусть A удовлетворяет условиям теоремы 1 и X обладает фундаментальной последовательностью ограниченных множеств.

Для того чтобы A порождал A -полугруппу на Σ_a , необходимо и достаточно, чтобы существовала такая сохраняющая последовательность (μ_n) , что выполняются условие 1) теоремы 4 и условие:

2') существует такое натуральное число N , что семейства операторов

$$\{(1 + |\lambda|)^{-N} R_n(\lambda) \mid \lambda \in S_{a-\varepsilon}, \mu_n \in \Xi_n\},$$

где $\Xi_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\mu_n \mid (-\infty, n-1] \subset \text{supp } \mu_n \subset (-\infty, n]\}$, равномерно непрерывны.

В заключение автор выражает благодарность Г. П. Акилову за обсуждение результатов работы.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
31 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, 1963.
² С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», 1967. ³ G. Da Prato, U. Mosco, Ann. Scuola Norm. Super. Pisa, **19**, 563 (1965). ⁴ Idem., p. 367. ⁵ G. Da Prato, Ricerche Math., **15**, № 2, 223 (1966).
⁶ D. Fujiwara, J. Math. Soc. Japan, **18**, № 3, 267 (1966). ⁷ Г. И. Лаптев, Функц. анализ и его приложения, **4**, № 4, 31 (1970). ⁸ Ю. М. Вувуникян, ДАН, **198**, № 2 (1971).

346223