Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 2

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

А. К. ГУЩИН

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 14 IX 1971)

Пусть Ω — неограниченная область n-мерного пространства R_n, граница Γ которой состоит из конечного числа непересекающихся, замкнутых или неограниченных поверхностей Ляпунова.

В работе ([1]) рассматривалось решение $u(t, x)$ в цилиндре $\Omega\times(t>0)$ второй или третьей краевой задачи для линейного однородного параболического уравнения второго порядка с нулевым граничным условием и начальной функцией $\varphi(x)$ из пространства $L_1(\Omega)$. Были выделены такие классы неограниченных областей $\mathfrak{A}(a, n)$, $1\leqslant a\leqslant n$, что если $\Omega\in\mathfrak{A}(a, n)$, то решение $u(t, x)$ при некоторых условиях на коэффициенты при младших членах в уравнении (в частности, гарантирующих выполнение принципа максимума) удовлетворяет оценке

$$\sup_{x\in\Omega}|u(t, x)|\leqslant C_0\|\varphi\|_{L_1(\Omega)}\max(t^{-\alpha/2}, t^{-n/2}) \tag{1}$$

для всех $t>0$; причем постоянная C_0 одна и та же для всех уравнений, имеющих одну постоянную эллиптичности. Заметим, что оценка (1) не может быть точной по порядку убывания решения при $t\to\infty$ для всех таких уравнений. Действительно, для уравнения $u_t=\Delta u+cu$ с отрицательной постоянной c решение можно представить в виде $u(t, x)=e^{ct}u_1(t, x)$, где $u_1(t, x)$ — решение той же краевой задачи для уравнения теплопроводности. Следовательно, $u(t, x)$ экспоненциально убывает при $t\to\infty$.

В настоящей заметке рассматривается вопрос о точности оценки (1) для решения второй краевой задачи для уравнения без младших членов

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}=Lu=\sum_{i, j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(t, x)\frac{\partial u(t, x)}{\partial x_j}\right), \tag{2}$$

$$\left.\frac{\partial u(t, x)}{\partial N}\right|_{x\in\Gamma}=0, \tag{3}$$

$$u(0, x)=\varphi(x), \tag{4}$$

где симметричная матрица $a_{ij}(t, x)$ удовлетворяет условию

$$0<\gamma\leqslant\sum_{i, j=1}^{n}a_{ij}(t, x)\xi_i\xi_j\leqslant\gamma^{-1}$$

при $\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2=1$, а N — внешняя (по отношению к Ω) конормаль эллиптического оператора L.

Так как при $\alpha_1>\alpha_2$ $\mathfrak{A}(\alpha_1,n)\subset\mathfrak{A}(\alpha_2,n)$, то оценка (1) не может быть точной по порядку убывания решения при $t\to\infty$ для всех областей Ω из данного класса. Целью настоящей заметки является выделение такого подкласса $\mathfrak{B}(\alpha)$ класса $\mathfrak{A}(\alpha, n)$, в котором оценка (1) точна, т. е. если

$\Omega \in \mathfrak{B}(\alpha)$, то при некоторых ограничениях на начальную функцию для решения задачи (2), (3), (4) существует аналогичная оценка снизу.

Пусть Q — произвольное измеримое подмножество области Ω. Рассмотрим функцию

$$l(v) = \inf_{\operatorname{mes} Q = v} \operatorname{mes}_{n-1} [\partial Q \cap \Omega],$$

где ∂Q граница множества Q. Область Ω принадлежит классу $\mathfrak{A}(\alpha, n)$, $1 \leqslant \alpha \leqslant n$, если функция $l(v)$ определена для всех $v > 0$ и справедливо неравенство

$$l(v) \geqslant d_0 \min\{v^{(\alpha-1)/\alpha},\ v^{(n-1)/n}\}, \tag{5}$$

с некоторой положительной постоянной d_0.

Пусть ξ — произвольная фиксированная точка области Ω. Обозначим $s_\xi(R) = \operatorname{mes}_{n-1}((|x - \xi| = R) \cap \Omega$. Если $\Omega \in \mathfrak{A}(\alpha, n)$, то $s_\xi(R) \geqslant d \min(R^{\alpha-1}, R^{n-1})$, где положительная постоянная d зависит от α и d_0 из условия (5). Мы будем говорить, что область Ω принадлежит классу $\mathfrak{B}(\alpha)$, если $\Omega \in \mathfrak{A}(\alpha, n)$ и существует такая постоянная d_1 (d_1 зависит от точки ξ), что

$$s_\xi(R) \leqslant d_1 \min\{R^{\alpha-1},\ R^{n-1}\}. \tag{6}$$

Заметим, что область $x_2 > |x|^{\beta 2}$, $\beta \geqslant 1$ (обозначим ее через Ω_β), принадлежит классу $\mathfrak{B}(\alpha)$ с $\alpha = 1 + 1/\beta$, причем $d_1 \leqslant C(|\xi| + 1)^{\alpha-1}$, где C — абсолютная постоянная.

Пусть, как и в [1], граница области Ω удовлетворяет следующему условию: существуют такие постоянные $\delta_0 > 0$ и $a_0 > 0$, что для любой точки $x_0 \in \Gamma$ пересечение шара $|x - x_0| \leqslant \delta_0$ с поверхностью Γ связно и $(\nu(x_1), \nu(x_2)) \geqslant a_0$ для $x_1 \in \Gamma$, $x_2 \in \Gamma$, $|x_1 - x_2| \leqslant \delta_0$, где $\nu(x)$ — внешняя (по отношению к Ω) единичная нормаль к границе Γ в точке x. Мы будем предполагать, что коэффициенты уравнения $a_{ij}(t, x)$ непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера по переменным x и t; кроме того, существуют производные $\partial a_{ij}(t, x) / \partial x_i$ и они непрерывны, ограничены и удовлетворяют условию Гёльдера по переменным x.

Обозначим через $G(t, x; \tau, \xi)$ функцию Грина задачи (2), (3). Если $\Omega \in \mathfrak{A}(\alpha, n)$, то из неравенства (1) немедленно следует, что

$$\sup_{x \in \Omega} G(t, x; 0, \xi) \leqslant C_0 \max(t^{-\alpha/2},\ t^{-n/2}). \tag{7}$$

Точность оценки (7) показывает следующая

Теорема 1. *Если $\Omega \in \mathfrak{B}(\alpha)$, то справедливо неравенство*

$$\sup_{x \in \Omega} G(t, x; 0, \xi) \geqslant C_1 \max(t^{-\alpha/2},\ t^{-n/2}), \tag{8}$$

где C_1 зависит лишь от постоянной эллиптичности γ и параметров α, d_0 и d_1 из условий (5), (6).

В случае, когда $\Omega = \Omega_\beta$, для функции Грина $G(t, x; 0, \xi)$ из неравенств (7) и (8) получаем оценку

$$C_1 \max(t^{-\frac{\beta+1}{2\beta}},\ t^{-1}) \leqslant \sup_{x \in \Omega} G(t, x; 0, \xi) \leqslant C_0 \max(t^{-\frac{\beta+1}{2\beta}},\ t^{-1}).$$

Следующее утверждение устанавливает точность оценки (1) для решения задачи (2), (3), (4).

Теорема 2. *Пусть $u(t, x)$ — решение в цилиндре $\Omega \times (t > 0)$ задачи* (2), (3), (4), *а начальная функция $\varphi(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ — неотрицательная непрерывная и ограниченная функция, а $\varphi_2(x) \in L_1(\Omega)$, $J_1 = \int_\Omega \varphi_2(x)\,dx > 0$ и конечны интегралы $J_2 = \int_\Omega |x|\,|\varphi_2(x)|\,dx$ и $J_3 = \int_\Omega |\varphi_2(x)| \ln d_1(x)\,dx$.*

Тогда если $\Omega \in \mathfrak{B}(\alpha)$, то имеет место неравенство

$$\sup_{x \in \Omega} u(t, x) \geqslant a(\sqrt{t} + b)^{-\alpha}, \tag{9}$$

где постоянные a и b зависят от γ, α, d_0, d_1 и интегралов J_1, J_2 и J_3.

Замечание 1. В частности, оценка (9) справедлива, если $\Omega \in \mathfrak{B}(\alpha)$, а начальная функция $\varphi(x)$ финитна и $\int\limits_{\Omega} \varphi(x)\,dx > 0$.

Замечание 2. Так как в неравенстве (1) постоянная C_0 не зависит от коэффициентов уравнения (зависит лишь от γ, α, d_0), то оно справедливо и без условия гладкости коэффициентов, т. е. для обобщенного решения параболического уравнения с измеримыми ограниченными коэффициентами.

Действительно, рассмотрим сначала случай гладкой финитной начальной функции $\varphi(x)$. Пусть $u(t, x)$ — обобщенное решение из пространства $W_2^{1, 1/2}(\Omega \times (0, T))$ (при произвольном $T > 0$) второй краевой задачи для уравнения (2) с измеримыми и ограниченными коэффициентами, а $u_m(t, x)$ — решения той же задачи для уравнений $\partial u_m / \partial t = L_m u_m$, коэффициенты которых почти всюду сходятся к коэффициентам оператора L. Тогда последовательность $u_m(t, x)$ почти всюду сходится к $u(t, x)$ и, следовательно, для обобщенного решения $u(t, x)$ справедливо неравенство (1). Для произвольной начальной функции $\varphi(x)$ из $L_1(\Omega)$ слабое решение можно определить как равномерный при $t \geqslant \delta$ ($\delta > 0$ любое) предел обобщенных решений с гладкими финитными начальными функциями $\varphi_m(x)$, сходящимися к $\varphi(x)$ в норме $L_1(\Omega)$. Равномерная сходимость таких решений, так же как и независимость слабого решения от выбора последовательности $\varphi_m(x)$ (а следовательно, и единственность), следует из неравенства (1). Очевидно, что неравенство (1) для такого решения имеет место.

Нетрудно видеть, что и в теореме 2 можно освободиться от условия гладкости коэффициентов уравнения (2), если считать, что $\varphi(x) = \varphi_2(x)$ ($\varphi_1(x) \equiv 0$) и под решением понимать только что определенное слабое решение.

Доказательство теорем опирается на оценку момента функции Грина $G(t, x; 0, \xi)$:

$$\mu_\xi(t) = \int\limits_{\Omega} |x - \xi|\, G(t, x; 0, \xi)\,dx.$$

Для фундаментального решения $G(t, x; 0, \xi)$ уравнения (2), т. е. когда $\Omega = R_n$, Нэш ([2]) показал, что имеет место неравенство

$$k_1 \sqrt{t} \leqslant \int\limits_{R_n} |x|\, G(x, t; 0, 0)\,dx \leqslant k_2 \sqrt{t}$$

с положительными постоянными k_1 и k_2, зависящими лишь от γ.

Используя метод, близкий к методу ([2]), из оценки (1) и принадлежности области Ω классу $\mathfrak{B}(\alpha)$ можно установить такую же оценку для момента $\mu_\xi(t)$ функции Грина задачи (2), (3).

Лемма. *Если $\Omega \in \mathfrak{B}(\alpha)$, то справедливо неравенство*

$$b_1 \sqrt{t} \leqslant \mu_\xi(t) \leqslant b_2 \sqrt{t}, \tag{10}$$

где положительные постоянные b_1 и b_2 зависят лишь от γ, α, d_0 и d_1, причем $b_2 \leqslant b_3 \ln d_1$, постоянная b_3 не зависит от ξ.

Используя сформулированную лемму, наметим доказательство теоремы 1. Пусть t — произвольное положительное число, а $M_{R\xi}(t) = \sup\limits_{x \in \Omega \cap (|x-\xi| < R)} G(t, x; 0, \xi)$. Тогда

$$1 = \int\limits_{\Omega} G(t, x; 0, \xi)\,dx \leqslant M_{R\xi}(t)\, v_\xi(R) + \frac{1}{R}\mu_\xi(t),$$

где $v_\xi(R) = \operatorname{mes}(\Omega \cap (|x - \xi| < R))$. Подставляя в последнее неравенство оценку $v_\xi(R)$, которая легко получается из неравенства (6), неравенство (10) и минимизируя его по R, получим неравенство (8).

Доказательство теоремы 2 использует оценку момента $\mu(t)$ решения $u(t, x)$ задачи (2), (3), (4)

$$\mu(t) = \int_\Omega |x|\,|u(t, x)|\,dx.$$

Пусть $u(t, x)$ — решение задачи (2), (3), (4) с непрерывной финитной начальной функцией $\varphi(x)$, удовлетворяющей условию $\int_\Omega \varphi(x)\,dx > 0$. Тогда

$$\mu(t) = \int_\Omega |x| \left|\int_\Omega G(t, x; 0, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\right| dx \leqslant \int_\Omega |\varphi(x)| \int_\Omega |x-\xi|\,G(t, x; 0, \xi)\,d\xi + $$
$$+ \int_\Omega |\xi|\,|\varphi(\xi)|\,d\xi \leqslant b_3 \sqrt{t} \int_\Omega |\varphi(\xi)| \ln d_1(\xi)\,d\xi + \int_\Omega |\xi|\,|\varphi(\xi)|\,d\xi.$$

Так как $\int_\Omega u(t, x)\,dx = \int_\Omega \varphi(x)\,dx$, то

$$0 < \int_\Omega \varphi(x)\,dx = \int_\Omega u(t, x)\,dx \leqslant M_R(t)\,v_0(R) + \frac{1}{R}\mu(t),$$

где $M_R(t) = \sup\limits_{x\in\Omega\cap(|x|<R)} u(t, x)$. Откуда, используя оценку $\mu(t)$, получаем

$$\sup_{x\in\Omega} u(t, x) \geqslant M_R(t) \geqslant \frac{\alpha}{2^{\alpha+1} d_1(0)} \frac{\left(\int_\Omega \varphi(\xi)\,d\xi\right)^{\alpha+1}}{\left[b_3 \sqrt{t} \int_\Omega |\varphi(\xi)| \ln d_1(\xi)\,d\xi + \int_\Omega |\xi|\,|\varphi(\xi)|\,d\xi\right]^{\alpha}}.$$

Из последнего неравенства и принципа максимума следует результат теоремы 2.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
1 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. К. Гущин, Дифференциальные уравнения, 6, № 4 (1970). [2] J. Nash, Am. J. Math., 80, 1931 (1958).